Napoletana Filosofia e Scienze

ANFSU

Renato Caccioppoli

Umane Associazione

2026

QUADERNI CACCIOPPOLI

ATTI DEL CONVEGNO "CULTURA, NATURA E SCIENZE DELL'ALTA COSTIERA AMALFITANA"

A cura di Giusy Annamaria Cappuccio, Lorenzo D'Errico, Nicla Palladino

la Valle del Tempo

Anno IV — Supplemento al N. 2

San Lazzaro di Agerola, 03-06 settembre 2026

Napoletana Filosofia e Scienze

ANFSU

Renato Caccioppoli

Umane Associazione

2026

QUADERNI CACCIOPPOLI

ATTI DEL CONVEGNO "CULTURA, NATURA E SCIENZE DELL'ALTA COSTIERA AMALFITANA"

A cura di Giusy Annamaria Cappuccio, Lorenzo D'Errico, Nicla Palladino

la Valle del Tempo

Anno IV — Supplemento al N. 2

San Lazzaro di Agerola, 03-06 settembre 2026

ANFSU — Associazione Napoletana Filosofia e Scienze Umane "R. Caccioppoli"

CONSIGLIO DIRETTIVO

Presidente Onorario
Franco Eugeni

Presidente
Ferdinando Casolaro

Vice Presidente
Giovanni Liccardo

Responsabile Rapporti con Istituzioni e Università
Nicla Palladino

Segretaria
Giusy Annamaria Cappuccio

Tesoriere
Salvatore Sessa

CONSIGLIERI

Giovanna Della Vecchia
Lorenzo D'Errico
Vincenzo Gagliotta
Marina Imperato
Serafina Ippolito
Giuseppe Mangione
Saverio Petitti
Letizia Testa
Ciro Totaro
Giovanni Vincenzi

PROGETTO GRAFICO

Lorenzo D'Errico
L.S. "Pasquale Villari", Napoli

COMITATO DI REDAZIONE

Direttore di redazione
Giuseppe Mangione

Condirettore di redazione
Ferdinando Casolaro

REDATTORI

Giusy Annamaria Cappuccio
I.C. Frattamaggiore 3 - G. Genoino

Giovanna Della Vecchia
Università "Federico II"

Lorenzo D'Errico
L.S. "Pasquale Villari", Napoli

Immacolato Iannone
I.I.S. «A. Lombardi», Airola

Marina Imperato
Dirigente Scolastico

Luca Paladino
ITIS "G. Ferraris" Napoli

Nicla Palladino
Università del Molise

Alessandra Rotunno
L.S. "A. Labriola", Napoli

Ciro Totaro
ITIS "G. Ferraris", Napoli

Giovanni Vincenzi
Università di Salerno

INDICE

Editoriale Atti del convegno Cultura, Natura e Scienze dell'Alta Costiera Amalfitana

a cura di Giusy Annamaria Cappuccio, Lorenzo D'Errico, Nicla Palladino …… 4

Prima sessione - La geometria/Le geometrie

La Geometria: Euclide, "oltre Euclide"

Tante proposte di aggiornamento nell'insegnamento della Geometria nel XX secolo. La Scuola lo sa?

di Ferdinando Casolaro ……9

Piani proiettivi: un ponte tra arte, geometria, algebra e didattica

di Nicola Durante ……23

Un affresco della vita matematica napoletana tra il 1732 e il 1778.

di Franco Eugeni ……51

Spazi lineari, piani affini e piani proiettivi finiti

di Franco Fernicola, Volpe Benedetta ……73

Geometrie non euclidee e filosofia. Una proposta didattica interdisciplinare, tra Ernst Cassirer ed Henri Poincaré

di Giuseppe Mangione ……86

Introduzione alla geometria della sfera come modello di geometria non euclidea

di Luigi Tomasi …… 107

Seconda sessione - Matematica, Natura e Scienze

Q - OMPUTER

di Francesco Bevacqua ……131

Dal problema del doppio strato all'equazione della brachistocrona

di Loredana Biacino ……152

Macchine grafiche per la analisi del Trattato di Archimede sui corpi galleggianti

di Vittorio Bovolin ……164

Disequazioni trigonometriche nel campo dei numeri complessi: un ponte verso la cinematica inversa in robotica

di Mario De Febbrari ……178

L'Architettura dei Numeri nell'Aritmetica di Peano

di Giovanna della Vecchia ……194

La discesa della biglia: un'attività di orientamento per la Scuola secondaria di secondo grado

di Roberta Di Gennaro, Gianpaolo Piscitelli ……213

Il Cammino dell'Angelo di Monte Faito. Esempio di evoluzione nel tempo dell'escursionismo religioso

di Ciro Di Martino ……224

Una lettura alternativa: monotonia e concavità

di Sofia La Franca ……233

I modelli matematici nella Fisica classica e nella Meccanica quantistica

di Mandrone Mario Innocenzo ……244

La Pigna matematica

di Mariagrazia Santella, Rosanna Ramacciato ……273

Terza sessione - La pagina letteraria: Giornata del libro e della lettura

Giornata del libro e della lettura in Costiera Osservatorio Astronomico di Agerola

a cura del Consiglio Direttivo dell'ANFSU "R. Caccioppoli" ……294

La tutela dell'incanto di un luogo sospeso

di Laura Colantonio ……315

La dignità della parola nell'era dell'Intelligenza Artificiale
di Antonella Prudente ……..323
Armaghedòn. Monologo in 9 scene
di Antonio Martone ……..329

Editoriale Atti del convegno Cultura, Natura e Scienze dell'Alta Costiera Amalfitana

A cura di
Giusy Annamaria Cappuccio[*], Lorenzo D'Errico[**], Nicla Palladino[***]

[*]Segretaria ANFSU "R. Caccioppoli" - Docente I.C. "Genoino" Frattamaggiore (NA)
[**]Consigliere ANFSU e responsabile Progetto grafico "Quaderni Caccioppoli" - Docente L.S. "P. Villari", Napoli
[***]Consigliere ANFSU "R. Caccioppoli" – Professoressa presso il Dipartimento di Medicina e Scienze della Salute, Università del Molise

Il volume raccoglie i lavori presentati al Convegno "Cultura, Natura e Scienze dell'Alta Costiera Amalfitana" che si è svolto, come di consueto, nella cittadina di Agerola nella prima settimana di settembre 2026, presso l'Osservatorio Astronomico nella giornata di giovedì 3 e al Campus Principe di Napoli nei giorni di venerdì 4, sabato 5 e domenica 6.

Il Convegno, alla sua VI edizione, rientra tra le attività del Programma Culturale-Turistico del Festival dell'Alta Costiera Amalfitana espletato annualmente ad Agerola. È stato organizzato dall'Associazione Napoletana di Filosofia e Scienze Umane "R. Caccioppoli" (ANFSU) in collaborazione con le associazioni Mathesis "Morelli e Rao" di Napoli e "Mathemare" di Castellammare di Stabia, avvalendosi anche del patrocinio del comune di Agerola e delle Accademie APAV e AFSU in Teramo, entrambe gemellate con l'ANFSU "R. Caccioppoli" nel perseguire gli obiettivi comuni di promozione del dialogo interculturale e di scambio di esperienze, valori e conoscenze.

La partecipazione dell'ANFSU "R. Caccioppoli", così come deliberato e verbalizzato dal Consiglio Direttivo nella seduta del 20 maggio 2026, rientra nelle attività programmate dall'Associazione per il secondo semestre del

corrente anno nell'ambito del Progetto *Dalla narrativa scolastica di Carlo Collodi alle Tecnologie Digitali - L'impegno pedagogico e la responsabilità della Scuola per l'autonomia degli studenti,* approvato dal Consiglio su proposta della Direzione generale per le politiche culturali e turismo della Regione Campania per l'anno 2026.

La scelta della cittadina di Agerola è dovuta, oltre che alla grande disponibilità che l'amministrazione - oggi presieduta dal sindaco Tommaso Naclerio - ha dato negli anni alla realizzazione delle nostre attività, alla forte attrazione turistica che la cittadina ha da sempre esercitato favorendo la presenza di visitatori da ogni parte d'Italia. Particolarmente vantaggiosa è, infatti, la sua posizione geografica in quanto Agerola fa da "ponte" tra la città metropolitana di Napoli e la città di Salerno ed è quindi facilmente raggiungibile da docenti e dirigenti delle scuole e delle Università delle due prestigiose città.

Questa edizione del convegno si è svolta con la distribuzione delle tematiche in due fasi:

Fase 1. Nella giornata di giovedì 03-09-2026, dalle ore 15.00 alle ore 19.00 si è tenuta la *Giornata del libro e della lettura in Costiera* che, avendo avuto un alto numero di richieste di autori per la partecipazione, è proseguita nel giorno successivo, venerdì 04-09, nella stessa fascia oraria.

Fase 2. Nella mattinata di venerdì 04 e nelle giornate successive - dalle ore 09.00 di sabato 05 alle ore 13.30 di domenica 06 - si sono affrontati temi di natura scientifica e interdisciplinare. Avendo come base l'evoluzione storica della Geometria, si è discusso sulle interrelazioni tra le varie discipline secondo la moderna linea dell'*Unicità delle Culture*, durante tre sessioni di lavoro, come emerge dall'assemblaggio degli articoli (e dall'indice) del presente fascicolo:

1. Matematica e Scienze: Sessione interdisciplinare:
2. Matematica pura e matematica applicata ai fenomeni fisici;
3. Parliamo di Geometria.

La conclusione dei lavori si è svolta nella mattinata di domenica 6 settembre con la *Tavola rotonda sul Liceo Matematico*, a cura della

Professoressa Nicla Palladino e del Professore Luigi Tomasi, componente della Giunta del Gruppo UMI dei Licei Matematici, per discutere sulla sperimentazione e sugli ultimi sviluppi del progetto.

Il Comitato Scientifico del Convegno è composto da:

Laura Colantonio, Loredana Biacino, Vittorio Bovolin, Giusy Annamaria Cappuccio, Ferdinando Casolaro, Mariarosaria Cuomo, Giovanna Della Vecchia, Lorenzo D'Errico, Franco Eugeni, Ciro Iovino, Mario Innocenzo Mandrone, Giuseppe Mangione, Annapatrizia Nastro, Nicla Palladino, Rosa Porciello, Alessandra Rotunno, Umberto Salzano, Ermanno Vasca.

I saggi e gli articoli contenuti in questo volume riflettono esclusivamente l'opinione e il pensiero dei rispettivi autori. I curatori e l'editore declinano ogni responsabilità in merito all'accuratezza, all'originalità, alla veridicità dei dati e dei contenuti scientifici, nonché all'eventuale utilizzo di materiale protetto da copyright non autorizzato. La responsabilità legale, civile e penale per i contenuti di ciascuna relazione resta pertanto interamente ed esclusivamente a carico dell'autore della stessa.

PRIMA SESSIONE

LA GEOMETRIA/LE GEOMETRIE

La Geometria: Euclide, “oltre Euclide”. Tante proposte di aggiornamento nell’insegnamento della Geometria nel XX secolo. La Scuola lo sa?

Ferdinando Casolaro
Presidente ANFSU “Renato Caccioppoli”
ferdinando.casolaro@gmail.com

Sunto- *Si propone un percorso di ampliamento del modello euclideo per l'insegnamento. Partendo da una sintetica analisi storica (Casolaro, Della Vecchia 2018), (Casolaro, Salzano 2022) con l’obiettivo di individuare gli aspetti interdisciplinari, si vuole evidenziare la funzione essenziale della geometria per la lettura dell’universo oggi, a seguito degli sviluppi della scienza ma anche della letteratura e dell’arte negli ultimi due secoli. Nelle Indicazioni nazionali e Linee guida, relativamente alla geometria, si fa solo qualche confuso cenno allo studio di geometrie che sono alla base della Fisica moderna - geometrie sullo spazio curvo (Casolaro, Pisano 2011), (Casolaro, Pisano 2011) - dell'arte e dell'architettura (proiettiva e descrittiva Cundari 1997). Lo studio ed i risultati dei matematici-pedagogisti attivi nei Nuclei di Ricerca Didattica istituiti nelle Università italiane negli ultimi settanta anni portano invece a considerazioni diverse che nel presente lavoro analizzeremo. Il percorso è sviluppato dal sottoscritto in collaborazione con altri docenti citati in bibliografia, di cui tutti i lavori indicati sono disponibili. Li posso inviare via mail a coloro che me li chiederanno.*

Parole chiave: *Geometria Proiettiva; Spazio Curvo; Omologia; Prodotto scalare*

Abstract- *We propose a path to expanding the Euclidean model for teaching. Starting from a brief historical analysis (Casolaro, Della Vecchia 2018), (Casolaro, Salzano 2022) with the aim of identifying interdisciplinary aspects, we aim to highlight the essential function of geometry in understanding the universe today, following developments in science but also in literature and art over the past two centuries. In the National Guidelines and Guidelines, with regard to geometry, only a few vague references are made to the study of geometries that form the basis of modern physics (geometries on curved space), art, and architecture (projective and descriptive). The research and findings of mathematician-pedagogists active in the Educational Research Units established in Italian universities over the past seventy years lead to different considerations, which we will analyze in this paper. All the works listed in the bibliography are available. I can send them to anyone who requests them.*

Keywords: *Projective Geometry; Curved Space; Homology; Scalar Product*

1. Introduzione

Nei corsi di formazione-aggiornamento per i docenti sul tema *La geometria: Euclide, ... oltre Euclide*, espletati nelle scuole, nelle università e nelle associazioni culturali per l'insegnamento negli ultimi decenni, con un Progetto redatto negli anni 'Novanta' del secolo scorso dal M.P.I. in collaborazione con il Dipartimento di architettura dell'Università "Sapienza" di Roma, l'osservazione che mi si poneva era:

non c'è il tempo per aggiungere ulteriori elementi ai classici programmi o (riguardo gli ultimi decenni) 'Indicazioni ministeriali e Linee Guida' che possano ampliare il percorso di geometria adeguandolo all'evoluzione del mondo negli ultimi secoli.

Precisamente, l'idea di ampliamento del modello euclideo alle altre geometrie sviluppatesi negli ultimi due secoli, indispensabile ad una corretta visione del mondo che ci circonda, viene vista come un'aggiunta di ulteriori elementi - in particolare di geometria proiettiva e di geometrie non euclidee - alle proposte delle indicazioni ministeriali e linee guida.

Non è così, perché il mio obiettivo è l'inserimento di percorsi organizzati all'interno dello sviluppo programmatico della geometria euclidea (anche secondo le Indicazioni nazionali e le Linee guida), che resta sempre un forte strumento a disposizione del docente per educare gli allievi al miglioramento delle capacità logiche e di linguaggio ma che, dopo 2300 anni dalla formulazione di Euclide, va sicuramente ampliato all'evoluzione ed ai risultati dei secoli successivi.

Si eviteranno dimostrazioni di teoremi pesanti e macchinosi che spesso sono proprietà evidenti e si inseriranno concetti fondamentali quali *punto all'infinito* (Casolaro, Rotunno 2015) in ambito proiettivo e di *prodotto scalare* (Casolaro 2019) per la descrizione dello spazio curvo attraverso le proprietà degli spazi vettoriali.

Relativamente alla Geometria Proiettiva, si propone un percorso sviluppato in collaborazione con Alessandra Rotunno (Casolaro, Rotunno

2003) che l'aveva già sperimentato all'Istituto d'Arte "Boccioni" di Napoli all'inizio del XXI secolo.

In seguito, è stato oggetto di proposta nelle classi in cui i corsisti della SICSI (SSIS-Campania) hanno effettuato il Tirocinio, per cui è stato sperimentato con la partecipazione degli alunni.

Riguardo il modello geometrico per lo spazio curvo, utilizzato da Einstein per la Teoria della Relatività, ho proposto un percorso, già presentato al Congresso Nazionale Mathesis 2002 (Casolaro 2002) anche questo sperimentato per alcuni anni e da molti giovani docenti nell'ambito del tirocinio alle SSIS.

Il Progetto, nella sua globalità, è inserito nel volume degli atti della Scuola Estiva di Terni 2011 (Casolaro, Prosperi 2011) dove nelle pagine 9-11 c'è la descrizione degli argomenti che permettono di comprendere il lavoro di assemblaggio che hanno fatto i docenti partecipanti.

In seguito, il Progetto è stato presentato, su invito, in Atenei stranieri quali Università della Romania: Iasi, 2006 e University Centre of Reșița nel 2018, Università di Bratislava in Slovacchia nel 2012 (Casolaro, Paladino 2012), "University of Defence" di Brno in Repubblica Ceca nel 2015 (Casolaro, Rotunno 2015), University of Seville in Spagna nel 2017 (Casolaro, Casolaro 2017).

2. L'evoluzione dei programmi nelle Scuole secondarie di secondo grado dalla riforma Gentile al Progetto Brocca

Nel periodo 1923-1945 i programmi per le scuole secondarie di secondo grado erano rimasti fermi alla riforma Gentile. Nel 1945 una commissione nominata dai governi delle potenze vincitrici della Seconda guerra mondiale formulò dei piani di studio destinati a sostituire quelli di epoca gentiliana.

Nel 1950 la *comunità matematica italiana* elaborò nuovi piani di studio, tenendo anche conto delle esperienze maturate in altre nazioni, in particolare in Francia, Belgio ed Inghilterra (Morelli 1985).

Nel periodo 1950-1990 furono elaborate *tre consecutive proposte di modifica della riforma Gentile*.

1) 1961-1962: prima modifica alla riforma. Furono istituite delle *classi pilota*, nelle quali si affrontano temi di *matematica moderna* e l'anno successivo (1963) fu nominata una commissione UMI-CIIM (*commissione di Frascati* perché si riuniva a Frascati) che ebbe il compito di elaborare nuovi programmi di *Matematica* per i licei.

I programmi di Frascati presentano un primo ampliamento nella trattazione della geometria, rispetto alla impostazione euclidea:

per il terzo anni si parla di piano vettoriale geometrico (Casolaro 2002) *e di gruppi delle congruenze e delle similitudini* (Casolaro pag. 220-239 in Cundari 1997) *del piano; per il quarto anno si passa allo spazio vettoriale geometrico e per il quinto anno si parla di spazio vettoriale astratto*.

2) 1985: seconda modifica alla riforma dei programmi di matematica: Piano Nazionale per l'Informatica (PNI), promosso nel 1985 dal ministro della PI, Franca Falcucci.

A tal fine fu costituito un comitato ristretto *di cui faceva parte, per l'area matematica, Giovanni Prodi*.

L'attuazione del piano ebbe inizio con la *formazione iniziale di un gruppo di formatori, che a loro volta contribuivano alla formazione dei docenti in attività*.

3) 1988: terza modifica alla riforma - Il ministro della P.I. Giovanni Galloni istituì una commissione col compito di procedere alla revisione dei *programmi dei primi due anni dell'istruzione secondaria di secondo grado*.

Successivamente la medesima commissione fu incaricata di estendere il lavoro anche ai *programmi del triennio*.

Coordinatore dei lavori fu nominato il sottosegretario alla P.I. Beniamino Brocca, da cui il nome *Commissione Brocca*.

Entrambi i programmi Brocca furono pubblicati dal M.P.I. e furono distribuiti ai docenti operanti nelle classi sperimentali, ma non furono mai resi disponibili al pubblico attraverso i normali canali commerciali.

I piani di studio Brocca, sempre in riferimento alla matematica, hanno recepito molte delle indicazioni dei programmi di Frascati e del PNI, in

particolare ciò che riguarda la geometria, e più specificamente la geometria basata sulle trasformazioni geometriche (Giovanni Prodi).

A tal proposito, fu inserito, parallelamente ai piani di studio *Brocca*, un Progetto sulle *interrelazioni tra l'insegnamento della Matematica e l'insegnamento del Disegno* che teneva conto dell'utilizzo delle nuove tecnologie. Il Progetto fu coordinato da Cesare Cundari[1] per il disegno e da Bruno Rizzi[2] per la Matematica (Cundari 1997) ed aveva come obiettivo:

- per il Disegno, l'utilizzo delle tecniche informatiche (CAD, GET, CABRI', ...) che sostituivano la rappresentazione con riga e compasso;

- per la Matematica, l'esigenza di educare i docenti (successivamente gli studenti) alle conoscenze fondamentali della geometria su cui sono basate le nuove tecniche, cioè la Geometria Proiettiva che, negli ultimi decenni è stata di fatto (anche se non ufficialmente) esclusa dai programmi di insegnamento nelle Università.

Relativamente alla stesura del percorso di Matematica, è stato incaricato il sottoscritto, le cui risultanze sono in bibliografia (Cundari, 1997, pagine 73-78; 85-118; 205-268).

3. Indicazioni emerse dai Nuclei di Ricerca Didattica. Risultanze degli studi nella seconda metà del XX secolo

Già in un articolo *Poligoni equivalenti per traslazione* sul 'Periodico di Matematiche' n. 3-1958, il prof. Tullio Viola Presidente nazionale Mathesis nel periodo 1960-1970, descrisse una sua esperienza in una classe di Scuola superiore esponendo una metodologia di insegnamento che teneva conto dei risultati di Gaspard Monge sulla Geometria Descrittiva, con l'auspicio che la Comunità matematica desse successivamente seguito.

Negli anni successivi alcuni matematici (Bruno de Finetti, Lucio Lombardo Radice, Emma Castelnuovo, Aldo Morelli,… ed altri) hanno

[1] Ordinario di Disegno dell'Architettura alla facoltà di Architettura dell'Università *La Sapienza* di Roma.

[2] (1935-1995) Ordinario di Analisi Matematica alla facoltà di ingegneria della Terza Università di Roma.

dedicato gran parte del proprio percorso professionale all'ammodernamento dell'insegnamento della Geometria che già in altre nazioni europee era in atto.

Purtroppo, in Italia non tutti aderirono ad un ritorno che era già antecedente alla riforma Gentile del 1923, tanto che al V° Convegno Nazionale della Didattica della Matematica nell'aprile 1979, dedicato principalmente all'insegnamento della geometria, il prof. Alberto Conte nella sua relazione introduttiva notava, con una certa amarezza, che *la geometria nelle scuole medie* (attuali Secondarie di primo e secondo grado) *si insegna sempre di meno*.

Purtroppo ciò era senz'altro vero specialmente al riferimento nei licei scientifici, dove in particolare, la geometria dello spazio è di fatto esclusa dai programmi: e va spiegato appunto con la complessità del problema che fa preferire argomenti più facili e più di moda.

Personalmente, ritengo che la difficoltà che gli studenti incontravano in quegli anni nell'affrontare la geometria dello spazio, fosse dovuta alla mancanza delle conoscenze di tecnica del disegno: nei licei classici e negli istituti tecnici e professionali per il commercio non è stato mai previsto lo studio di questa disciplina.

Le nuove tendenze, che in quegli anni si sono affermate nella concezione dello sviluppo della Matematica, hanno interessato principalmente la geometria elementare.

Si è accentuato il bisogno di rigore logico e di chiarezza di impostazione e *si è sviluppata la ricerca delle idee unificanti e delle strutture algebriche che sono alla base delle varie teorie*.

L'obiettivo principale nello studio della geometria elementare è stato individuato nella scoperta della struttura di *spazio vettoriale* insita nel piano euclideo (Casolaro 2018)

Anzi, è stato proposto in particolare dal matematico francese Jean Dieudonnè (1996-1992), di insegnare la *geometria euclidea piana* partendo dall'assioma unico:

Il piano è uno spazio vettoriale di dimensione due, dotato di prodotto scalare commutativo (Casolaro 2002).

Nel testo - adottato da molti docenti negli anni '70 e '80 – "*Il metodo matematico*" di Lina Mancini Proja - Lucio Lombardo Radice è esplicitamente detto:

la geometria euclidea è fondata proprio su un'assiomatica a base metrica; però si rinuncia a dichiarare subito in modo esplicito il sistema di assiomi, rimandando alla fine del testo il discorso chiarificatore sul metodo assiomatico e sulle diverse geometrie. Si preferisce far leva sulle capacità intuitive degli allievi e si rilevano due caratteristiche comuni alle trattazioni moderne:

1) *Lo studio e l'utilizzazione delle Trasformazioni geometriche con la scoperta delle strutture algebriche ad esse collegate: gruppo e spazio vettoriale* (Casolaro pag. 220-239 in Cundari 1997).

2) *La considerazione e l'utilizzazione del riferimento cartesiano*.

4. Proposte di matematici stranieri

Nel paragrafo precedente abbiamo citato la proposta del francese Dieudonnè di considerare il piano come uno 'spazio vettoriale di dimensione due'. Questa convinzione era alla base dell'insegnamento della Geometria in Francia e in Belgio, i cui maggiori esponenti erano rispettivamente Gustave Choquet (1915-2006) e Georges Papy (1920-2011).

La linea didattica del matematico francese Gustave Choquet ha avuto anche in Italia, negli ultimi decenni del secolo scorso, una buona considerazione per poi rientrare nel dimenticatoio.

Choquet proponeva di *trattare prima la geometria affine basata sugli assiomi di appartenenza, di ordinamento, di parallelismo e di continuità, e in un secondo momento la geometria metrica, basata anche sugli assiomi di congruenza*.

La separazione fra 'geometria affine' e 'geometria metrica' sembrava più favorevole per fare intendere il significato di 'metodo assiomatico' ed

anche più rispondente allo sviluppo delle capacità logiche ed intuitive dei ragazzi.

Essa però è stata introdotta in testi e programmi molto limitatamente e da pochi autori, specialmente in Italia.

Del resto, già nel secolo precedente, dopo i tentativi del matematico italiano Giovanni Girolamo Saccheri (1667-1733) e le discussioni sui limiti della geometria euclidea, i principali risultati sulle geometrie non euclidee e sulla Geometria Proiettiva si sono avuti in Francia (Desargues, Monge, Poncelet), Germania (Gauss, Riemann, Klein), in Russia (Lobačevskij), Romania (Bolyai), ecc.

Per brevità e per i limiti di questo lavoro, cito solo, in ordine cronologico, alcune conclusioni di Gauss, Riemann, Klein che hanno trovato conferma nel secolo successivo. Per l'approfondimento si rimanda ai riferimenti bibliografici.

4.1 - Carl Friedrich Gauss (1777-1855)

Nel 1817 Gauss, che già dal 1813 stava lavorando per lo sviluppo di una geometria che non comprendesse il postulato delle parallele, in una lettera a Olbers afferma che

non è possibile dimostrare che la geometria euclidea sia necessaria per lo sviluppo dell'universo fisico; è quindi possibile costruire un'altra geometria applicabile fisicamente (Casolaro, Santarossa 1997).

4.2 - Friedrich Bernhard Riemann (1926-1966)

In riferimento alla geometria per lo spazio fisico, Riemann nel 1854 concluse la presentazione della sua tesi di dottorato affermando che:

Lo studio della geometria non si può astrarre dall'evoluzione fisica. In uno spazio in cui la curvatura cambia da un luogo all'altro per la presenza della materia, e da un istante all'altro per il moto della materia, le leggi della geometria euclidea non sono valide. Pertanto, per determinare la vera natura dello spazio fisico, si deve associare fra loro spazio e materia.

Dichiara in proposito:

O la realtà soggiacente lo spazio forma una varietà discreta, oppure bisognerà cercare il fondamento delle sue relazioni metriche fuori di esso, nelle forze connettive che vi agiscono. Questo ci porta nel dominio di un'altra scienza, quella della fisica, in cui l'oggetto delle nostre ricerche non ci consente di entrare oggi (Casolaro 2002).

In questa varietà,

la geometria non si può astrarre dall'evoluzione fisica.

Conclusioni personali

Secondo la concezione classica, *la geometria esprime un insieme di proprietà relative al movimento dei corpi ed alla propagazione della luce, che si ottengono facendo astrazione dal tempo e dalle forze.*

Confortato dalla osservazione di Gauss e da quest'ultima affermazione di Riemann, ritengo che

Con un'estensione della geometria alla cinematica (che è la teoria del movimento rispetto allo spazio-tempo) e successivamente alla dinamica (con l'introduzione delle forze), si avranno approssimazioni che ci avvicinano man mano ad un grado più concreto della realtà fisica, che troverà poi un'ulteriore correzione con la Teoria della Relatività Generale.

Dunque, il modello newtoniano che assegna una legge per il moto libero di un punto e vi aggiunge poi una forza, risulta essere solo un'astrazione nella nuova costruzione della dinamica di Einstein.

Tale concezione sarebbe reale se la materia fosse composta da piccole masse, poste a distanza tale una dall'altra da potersi muovere senza subirne la reciproca influenza; invece la materia si muove sotto l'influenza di altra materia in modo apparentemente ondulatorio che, secondo la dinamica newtoniana è la causa delle forze gravitazionali.

4.3 - Felix Klein (1849-1925)

Relativamente alle proprietà proiettive, nel 1972 Felix Klein, con *Il programma di Erlangen*, considerava le *proprietà geometriche* delle figure classiche rispetto a *gruppi di trasformazioni* (Casolaro in Cundari, 1997)

Il gruppo di trasformazioni più ampio tra forme geometriche (rette, fasci di rette, piani, fasci di piani, spazi tridimensionali, ecc.) è il gruppo delle *proiettività* che, nel caso di trasformazioni piane (a cui noi ci riferiremo) prende il nome di *gruppo delle omografie* (Casolaro, Prosperi 2011).

L'idea di Klein consiste nell'applicazione della teoria dei gruppi (secondo la teoria algebrica di Galois e nella sistemazione data dopo da Jordan) alle teorie geometriche.

In tal modo, Klein presentava una teoria unificatrice che permetteva di classificare le varie geometrie che progredivano indipendentemente una dall'altra.

Klein osservò che nello spazio vi sono delle *trasformazioni* che non alterano le *proprietà geometriche* delle figure. L'insieme delle trasformazioni che lascia inalterate tali proprietà è detto *gruppo principale di trasformazioni*, in quanto:

- *componendo due (o più) trasformazioni, si ottiene sempre una trasformazione*;

- *esiste la trasformazione che trasforma la figura in se stessa (identità, che rappresenta l'elemento neutro rispetto alla composizione di trasformazioni)*;

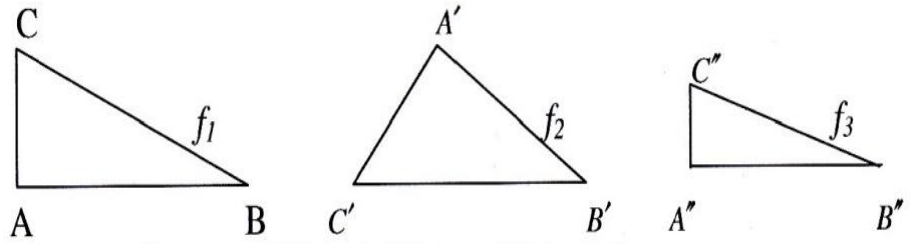
- *esiste la trasformazione inversa di una trasformazione data (esistenza del simmetrico rispetto alla composizione di trasformazioni)*;

- *la composizione di trasformazioni è associativa*.

Pertanto, l'insieme delle trasformazioni forma gruppo (*gruppo principale di trasformazioni*) rispetto all'operazione di composizione (o prodotto) di trasformazioni (Casolaro, Cirillo, Prosperi 2016).

Per *proprietà geometriche*, Klein intendeva quelle proprietà delle figure indipendenti:

- dalla posizione della figura nello spazio;
- dall'ordinamento delle sue parti;
- dalla sua grandezza assoluta.



In figura si può notare che la figura f_2 si ottiene da f_1 componendo due trasformazioni: una traslazione ed un ribaltamento; la figura f_3 si ottiene da f_1 con un'omotetia.

5. L'evoluzione nel terzo millennio

Il processo dell'evoluzione della Didattica della Matematica dal dopoguerra fino al 2001 (dal Ministero Gonella 1946 - all'inizio Ministero Moratti) è andato sempre nella direzione analizzata nei paragrafi precedenti con i principali matematici-pedagogisti (Lombardo Radice, Mancini Proia, Emma Castelnuovo, de Finetti, Villani, Prodi, Speranza, Morelli, Rizzi, ecc….) che, seppur con diverse argomentazioni, erano tutti convinti dell'esigenza di un Modello di Geometria più ampio rispetto a quello euclideo.

Negli ultimi decenni (in particolare con i ministri Moratti-Gelmini-Profumo) si è avuta un ritorno al modello gentiliano.

Premesso che una *Comunità Scientifica che dopo 2300 anni non è in grado di modificare (o aggiungere) nulla al Modello euclideo rappresenta una Comunità scadente*, voglio porre l'accento sui motivi per cui questo processo - che sarebbe dovuto essere naturale - ha trovato ostacoli. Cito due eventi:

a. *All'inizio degli anni sessanta, il gruppo di Geometria in Italia stabilì che nelle Università si poteva fare a meno dell'insegnamento della Geometria Proiettiva. Allo stesso modo non si è mai posto il problema delle geometrie non euclidee*.

PERCHÈ?

Perché sul tema *Proiettiva e Descrittiva* era stato scritto quasi tutto; il tema "*Spazio curvo*" era considerato argomento di Fisica, per cui le pubblicazioni originali per portare avanti i propri allievi nei concorsi universitari dovevano orientarsi su temi ancora aperti, quali Topologia, Spazi grafici, Geometria combinatoria, Geometrie finite ed alcune questioni avanzate di Algebra astratta; questi argomenti sono sicuramente interessanti, con aspetti da trarre anche per la didattica di cui, nel seguito, nessuno si è posto il problema.

Ovviamente, che il docente debba conoscere altri aspetti delle geometrie non significa riportare tutto in classe, ma avere una cultura generale per citare alcune questioni in opportuni momenti!

b. *Il problema dei finanziamenti*: lo studio di alcune questioni di carattere psico-pedagogico (come le Neuro-Scienze) all'interno dei NRC (Nuclei di Ricerca Didattica), nei primi decenni del XXI secolo, ha prevalso sull'insegnamento legato all'evoluzione del mondo geometrico e fisico. Cito una frase estratta da uno scambio di opinioni che ebbi alcuni anni fa con il Presidente di un Nucleo di Ricerca Didattica di cui facevo parte (non cito il nome per correttezza in quanto non è al corrente di questa mia missiva), da cui mi dimisi perché le questioni che si ponevano come oggetto di studio erano lontane dal mio modo di pensare (è un copia-incolla dal messaggio originale):

Ma ormai, caro Ferdinando, le cose vanno così ovunque, e non credo che sia un male. Una volta i finanziamenti arrivavano a pioggia, e bastava raccogliersi intorno ad un gruppo anche se si condivideva poco: ora occorre un gruppo serrato che lavora insieme su obiettivi molto specifici e accreditati a livello internazionale, e se non si fa così, non c'è alcuna speranza di avere soldi.

Pertanto, relativamente alla Geometria, l'unico avanzamento che è andato avanti negli ultimi decenni è legato all'utilizzo dell'Informatica. Allora, il ripristino nelle Indicazioni Nazionali del Modello gentiliano (non ufficiale ma di fatto, anche se apparentemente si citano frasi del tipo "conoscenze storiche, geometrie non euclidee, teoria della relatività, probabilità e

statistica…") e la convinzione che uscendo dal Modello classico si possano creare problemi agli studenti è dovuta alla nostra mancanza di conoscenza dell'evoluzione delle proposte didattiche degli ultimi 70 anni ed alla *volontà accademica-istituzionale di non spostare l'asse culturale sulla reale visione dell'universo fisico-geometrico*.

Bibliografia

A. Morelli (1985) *Sull'insegnamento della geometria elementare. Orientamenti moderni* - Periodico di Matematiche n. 1-2; pag. 142-152.

F. Casolaro (1997) *Gruppo delle similitudini, gruppo delle isometrie.* In Cundari (1997), pag. 220-239.

C. Cundari (1997) *Matematica e Disegno. proposte per una didattica finalizzata all'uso delle nuove tecnologie* - Progetto del M.P.I. e del Dipartimento di Progettazione dell'Università *La Sapienza di Roma*. Atti dei lavori svolti nei periodi: 11-15 dicembre 1990; 06-10 maggio 1991; 08-12 dicembre 1991.

F. Casolaro, R. Santarossa (1997) *Geometrie non euclidee e geometria differenziale: note didattiche*. Atti del Congresso Nazionale Mathesis 1997 "Attività algoritmica e pensiero dialettico nell'insegnamento della Matematica", pag. 213-219.

F. Casolaro (2002) *Un percorso di geometria per la Scuola del terzo millennio: dal piano cartesiano ad un modello analitico su uno spazio curvo*. Atti del Congresso Nazionale Mathesis, pag. 185-198.

F. Casolaro, A. Rotunno (2003) *La geometria nei licei ad indirizzo artistico: interrelazioni con le discipline di arte applicata*. Presentazione in power-point del lavoro di F. Casolaro (2003) *Le trasformazioni omologiche nella storia nell'arte, nella didattica*. Atti del II Convegno Internazionale *Arte e Matematica* - Vasto, 10 -12 aprile 2003, pagg. 129-148.

F. Casolaro, R. Prosperi (2011) Atti della Scuola Estiva di Terni *La Matematica per la Scuola Secondaria di secondo grado: un contributo per il docente di Matematica* - Editore 2C Contact.

F. Casolaro, R. Pisano (2011) *An Historical Inquiry on Geometry in Relativity: Reflections on Early Relationship Geometry-Physics (Part One)*. History Research - Vol. 1, Number 1, 47-60.

F. Casolaro, R. Pisano (2012) *An Historical Inquiry on Geometry in Relativity: Reflections on Early Relationship Geometry-Physics* - History Research - Vol. 2, Number 1, 57-65.

F. Casolaro, L. Paladino (2012) *Evolution of the geometry through the arts* APLIMAT 2012 11th International Conference on Applied Mathematics.

F. Casolaro, A. Rotunno (2015) *From the pictorial art to the linear transformations.* "University of Defence" di Brno in Repubblica Ceca. Ratio Mathematica.

F. Casolaro, L. Cirillo, R. Prosperi (2016) *Groups of Transformations with a Finite Number of Isometries: the Cases of Tetrahedron and Cube*. Ratio-Mathematica Vol. 31, pp. 93-110.

F. Casolaro, I. Casolaro (2017) *Sport social aspects, Design and Architecture as a transmission vehicles of Mathematics*. IV International Conference on Recent Trends in Social Sciences and Social Work. University of Seville.

F. Casolaro, G. Della Vecchia (2018) *La Matematica nella civiltà greca: momenti significativi attuali oggi*. "Science & Philosophy", Volume n.6, Issue n.1. pp. 177-186.

F. Casolaro (2018) *Quale Geometria per lo spazio fisico*. Quaderni APAV n. 1, pp. 57-68.

F. Casolaro (2019) *Dal vettore nello spazio piatto al tensore nello spazio curvo secondo il Modello di Minkovschj*. Quaderni APAV n. 4, pagg. 1-16.

F. Casolaro (2021) *Quali conoscenze di Geometria nella Scuola di oggi?*. Periodico di Matematica Vol. III (3-4), pp. 19-36.

F. Casolaro, U. Salzano (2022) *Le geometrie non euclidee nel mondo reale. Su quale Geometria poggia la Fisica moderna?* Periodico di Matematica Vol. IV (1), pp. 57-86.

Piani proiettivi: un ponte tra arte, geometria, algebra e didattica

Nicola Durante
Università degli Studi di Napoli Federico II
ndurante@unina.it

Sunto- *Proponiamo un percorso didattico nel quale prospettiva, metodo assiomatico, coordinate e algebra si illuminano a vicenda. Le due introduzioni tradizionali alla geometria proiettiva vengono raccordate sezionando i fasci di rette per l'origine: dalla retta* $y = 1$ *si ottengono i punti* $(a: 1)$ *e il punto improprio* $(1: 0)$*, mentre nel piano* $z = 0$ *ricompare la stessa retta proiettiva, descritta da* $(a: 1: 0)$ *e* $(1: 0: 0)$*. Il cambiamento delle sezioni in* $y = 2, y = 10$ *e* $z = 2, z = 10$ *rende visibile il significato della proporzionalità delle coordinate. Punti e rette acquistano così la stessa natura coordinata, preparando la dualità e il teorema di Desargues. Gli spazi proiettivi sono poi introdotti assiomaticamente mediante l'assioma di Veblen–Young: senza determinare la dimensione esatta, l'esistenza di due rette disgiunte permette di distinguere lo spazio dal piano e di comprendere perché in dimensione almeno tre Desargues valga sempre. I piani non desarguesiani, di Moufang e di traslazione mostrano quindi la relazione fra proprietà geometriche e strutture algebriche. Una seconda parte collega le coniche studiate nel piano affine reale alla geometria proiettiva. Il prodotto delle equazioni lineari di due rette, eventualmente coincidenti, introduce naturalmente le coniche degeneri. Dopo una breve definizione di proiettività, la costruzione di Steiner del 1832 produce una conica mediante le intersezioni di rette corrispondenti di due fasci; una dimostrazione coordinata mostra che la condizione di esistenza dell'intersezione è l'annullarsi di un determinante* 2×2*, e quindi un'equazione omogenea di secondo grado. La fattorizzazione della stessa equazione comprende anche il caso degenere. Si richiamano infine le estensioni alla cubica gobba e alle curve razionali normali, la generalizzazione di Donati–Durante negli spazi proiettivi finiti mediante collineazioni e le applicazioni ai codici MRD, insieme alle configurazioni di Pappo e Pascal e agli esempi offerti dai piani proiettivi finiti.*

Parole-chiave: *geometria proiettiva, prospettiva*

Abstract- *We propose an educational path in which perspective, the axiomatic method, coordinates, and algebra illuminate one another. The two traditional introductions to projective geometry are bridged by sectioning bundles of lines passing*

through the origin: from the line R, we obtain the points $(x, 1)$ *and the point at infinity* $(1,0)$*, while in the plane* R^2*, the same projective line reappears, described by* $(x_1, x_2, 1)$ *and* $(x_1, x_2, 0)$*. Changing the sections in* R^2 *and* R^3 *makes the meaning of coordinate proportionality visible. In this way, points and lines acquire the same coordinate nature, setting the stage for duality and Desargues' theorem. Projective spaces are then introduced axiomatically via the Veblen–Young axiom: without determining the exact dimension, the existence of two disjoint lines allows us to distinguish space from a plane and to understand why Desargues' theorem always holds in dimensions three and higher. Non-Desarguesian, Moufang, and translation planes thus demonstrate the relationship between geometric properties and algebraic structures. A second part connects the conics studied in the real affine plane to projective geometry. The product of the linear equations of two lines—whether distinct or coincident—naturally introduces degenerate conics. Following a brief definition of projectivity, Steiner's 1832 construction yields a conic through the intersections of corresponding lines of two pencils; a coordinate-based proof shows that the condition for the existence of an intersection is the vanishing of a determinant* 3×3*, resulting in a homogeneous equation of degree two. The factorization of this same equation also accounts for the degenerate case. Finally, we recall extensions to the twisted cubic and rational normal curves, the Donati–Durante generalization in finite projective spaces via collineations, and applications to MRD codes, alongside the Pappus and Pascal configurations and examples provided by finite projective spaces.*

Keywords: *Projective geometry, perspective*

1. Perché portare la geometria proiettiva in classe

L'ingresso tradizionale nella geometria proiettiva è spesso affidato a una formula: si aggiungono al piano affine i punti all'infinito, uno per ogni direzione. La formula è corretta, ma rischia di far apparire la teoria come un semplice completamento tecnico. Un percorso didattico più efficace può partire da una domanda visiva: perché nel disegno prospettico rette parallele sembrano incontrarsi?

La risposta non consiste nell'affermare che l'occhio "sbaglia". Consiste piuttosto nel cambiare il linguaggio geometrico: le rette parallele condividono una direzione e questa direzione viene trattata come un punto. Il punto all'infinito non è dunque un oggetto misterioso aggiunto artificialmente, ma il modo geometrico di registrare un'informazione già presente nel piano affine.

Questo avvio offre almeno quattro vantaggi. Collega matematica, storia dell'arte e rappresentazione dello spazio; mostra che una stessa situazione può richiedere linguaggi diversi; prepara il passaggio da una geometria metrica a una geometria dell'incidenza; crea una motivazione autentica per introdurre coordinate omogenee.

Il traguardo non è soltanto apprendere nuove definizioni. È comprendere come una teoria matematica nasca dall'interazione fra problemi, assiomi, modelli e strutture algebriche.

2. Una base assiomatica comune: gli spazi lineari

Per presentare in modo coerente piani e spazi, affini e proiettivi, conviene partire da una struttura d'incidenza comune.

Definizione 1. Uno *spazio lineare* è una coppia (P,L), dove L è una famiglia non vuota di sottoinsiemi propri di P, detti rette, tale che:

1. due punti distinti appartengono a una e una sola retta;
2. ogni retta contiene almeno due punti distinti;

L'esistenza di almeno due rette è ora automatica. Infatti, presa una retta ℓ, poiché ℓ è un sottoinsieme proprio di P esiste un punto $P_0 \notin \ell$; scelto $Q \in \ell$, la retta P_0Q è distinta da ℓ.

La definizione contiene soltanto la nozione di congiunzione di due punti. Le geometrie affini e proiettive si ottengono aggiungendo condizioni diverse alla stessa base.

Definizione 2. Un *piano affine* è uno spazio lineare nel quale, per ogni retta l e ogni punto $P \notin l$, esiste un'unica retta per P disgiunta da l. Tale retta è detta parallela a l.

Per passare dal piano agli spazi affini di dimensione superiore non basta identificare "parallele" e "disgiunte", perché nello spazio esistono anche rette sghembe. Si considera perciò una relazione di equivalenza fra le rette, chiamata *parallelismo*. La seguente caratterizzazione, dovuta a Lenz, fornisce il corrispettivo affine del teorema di Veblen–Young [8].

Teorema 3 (Lenz). Sia (P, L) uno spazio lineare dotato di una relazione di equivalenza fra le rette. Supponiamo che:

1. *per ogni punto $P \notin l$ passa un'unica retta parallela a l (assioma di Playfair);*
2. *se l e l' sono rette distinte e parallele, $P, Q \in l$, $P' \in l'$ e $R \in PP'P\}$, allora la retta RQ incontra l'.*

Allora la struttura è un piano affine oppure uno spazio affine desarguesiano $AG(d, K)$, con $d \geq 3$, su un corpo K, eventualmente non commutativo.

(Nel modello coordinato, *AG(n,K)* si ottiene dallo spazio vettoriale K^n prendendo come punti i vettori e come rette i traslati dei sottospazi vettoriali di dimensione uno.)

Didatticamente il risultato è prezioso: anche nel caso affine non è necessario conoscere la dimensione esatta. È sufficiente distinguere il caso piano dagli spazi di dimensione almeno tre; in questi ultimi la coordinatizzazione su un corpo e il teorema di Desargues sono inevitabili.

3. Dal punto di fuga al piano proiettivo

Nel piano affine due rette distinte possono essere incidenti oppure parallele. Questa distinzione obbliga a separare casi che, nella prospettiva, hanno un comportamento unitario. A ogni classe di rette parallele associamo perciò un punto improprio. L'insieme di tutti i punti impropri costituisce la retta impropria.

Definizione 4. Il completamento proiettivo di un piano affine si ottiene aggiungendo:

- un punto improprio per ciascuna direzione affine;
- una retta impropria contenente tutti i punti impropri.

Nel piano completato ogni coppia di rette distinte possiede esattamente un punto comune. Se le rette erano incidenti, il punto comune è proprio; se erano parallele, il punto comune è improprio. Il vantaggio concettuale è evidente: una disgiunzione di casi diventa un unico enunciato.

Attività 1 (Una fotografia e due linguaggi). Si scelga una fotografia con linee di fuga ben riconoscibili. Gli studenti individuano dapprima famiglie di rette parallele nella scena reale e poi i relativi punti di fuga nell'immagine.

La discussione finale distingue tre livelli: l'oggetto fisico, la sua rappresentazione piana e il modello proiettivo che spiega la rappresentazione.

4. Una sezione del fascio: le due costruzioni diventano una

È utile ricordare anzitutto le due vie con cui vengono normalmente introdotti i piani e gli spazi proiettivi. Sia K un campo. La prima parte da una struttura affine $A^n(K)$ e la completa aggiungendo le direzioni. In coordinate,

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1 : \cdots : x_n : 1),$$

mentre una direzione rappresentata da un vettore non nullo $v = (v_1, \dots, v_n)$ diventa il punto improprio

$$(v_1 : \cdots : v_n : 0).$$

Nel caso del piano affine i punti impropri formano una retta; in dimensione n formano un iperpiano proiettivo isomorfo a $P^{n-1}(K)$.

La seconda costruzione parte invece dallo spazio vettoriale K^{n+1}. I punti di $P^n(K)$ sono le classi dei vettori non nulli rispetto alla proporzionalità,

$$v \sim \lambda v (\lambda \in K^\times),$$

ossia, equivalentemente, i sottospazi vettoriali unidimensionali $\langle v \rangle_K$ generati da v nello spazio ambiente K^{n+1}. Le rette proiettive corrispondono invece ai sottospazi vettoriali bidimensionali $U \leq K^{n+1}$. La retta proiettiva associata a U è precisamente il fascio delle rette vettoriali per l'origine contenute nel piano vettoriale U:

$$P(U) = \{\langle u \rangle_K : 0 \neq u \in U\}.$$

Più in generale, i sottospazi proiettivi di dimensione r corrispondono ai sottospazi vettoriali di dimensione $r + 1$.

Le due costruzioni coincidono. Scegliere la carta $x_{n+1} = 1$ recupera $A^n(K)$, mentre $x_{n+1} = 0$ raccoglie le direzioni aggiunte:

$$P^n(K) = A^n(K) \cup P^{n-1}(K).$$

La costruzione mediante le sezioni $y = 1$ e $z = 1$, sviluppata qui sotto, rende geometricamente visibile questa equivalenza.

Prima di introdurre le coordinate omogenee conviene formulare il problema che le rende necessarie. Sulla retta affine ogni punto è descritto da una sola coordinata $a \in R$. Quando completiamo la retta aggiungendo il punto all'infinito, tutti i numeri reali sono però già stati utilizzati: non esiste un nuovo valore di a che possa rappresentare il punto aggiunto senza confonderlo con un punto affine. Una sola coordinata non basta più.

La soluzione consiste nell'usare coppie di coordinate omogenee:

$$a \leftrightarrow (a\colon 1), \infty \leftrightarrow (1\colon 0).$$

La seconda coordinata segnala quindi se il punto appartiene alla carta affine oppure è il nuovo punto improprio. Questa notazione non viene assunta formalmente, ma ricavata dalla costruzione geometrica seguente.

La retta proiettiva offre infatti un passaggio intermedio particolarmente trasparente. Nel piano reale consideriamo tutte le rette passanti per l'origine O e fissiamo la retta affine $y = 1$. Ogni suo punto $(a, 1)$ individua la retta

$$x = ay$$

passante per O; viceversa, ogni retta per O diversa dall'asse x incontra $y = 1$ in uno e un solo punto di questa forma. Rimane esclusa una sola retta, l'asse $y = 0$, che rappresentiamo mediante il punto $(1\colon 0)$. Per memorizzare questa scelta si può osservare che il primo coefficiente 1 richiama la sezione posta ad altezza 1: abbiamo esaurito i punti $(a, 1)$, mentre la direzione parallela alla sezione è rappresentata da $(1,0)$. Otteniamo così

$\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ = { (a:1) : a ∈ $\mathbb{R}$ } ∪ { (1:0) }.

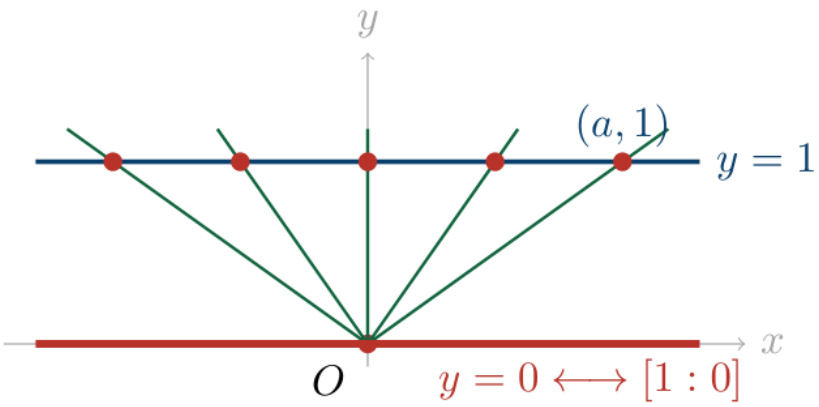


Figura 1. La sezione $y = 1$ incontra tutte le rette per l'origine tranne l'asse x. La retta esclusa fornisce il punto $(1:0)$.

La scelta di $y = 1$ non è intrinseca. Se scegliamo $y = 2$, la stessa retta vettoriale incontra la nuova sezione in $(2a, 2)$; scegliendo $y = 10$, l'intersezione è $(10a, 10)$. Pertanto

$$(a:1) = (2a:2) = (10a:10).$$

Anche la direzione esclusa può essere rappresentata da $(1,0)$, $(2,0)$ o $(10,0)$:

$$(1:0) = (2:0) = (10:0).$$

Il medesimo promemoria si adatta quindi alle nuove sezioni: il 1 di $(1,0)$ diventa 2 o 10, proprio come accade per l'ultima coordinata dei punti ordinari. Cambiare sezione cambia dunque il rappresentante, non il punto proiettivo. Le coordinate omogenee emergono da un esperimento geometrico, prima ancora di essere definite come relazione di equivalenza.

Lo stesso procedimento passa dal piano affine al piano proiettivo. In R^3 fissiamo il piano $z = 1$. Ogni retta per l'origine non contenuta in $z = 0$ incontra $z = 1$ in un unico punto $(a, b, 1)$. Se sostituiamo la sezione con $z = c$, dove $c \neq 0$, otteniamo

$$(ca, cb, c) = c(a, b, 1),$$

e quindi sempre lo stesso punto $(a:b:1)$.

Le rette per l'origine contenute nel piano $z = 0$ non incontrano $z = 1$. Esse formano però un fascio di rette per l'origine all'interno del piano $z =$

0, cioè precisamente una retta proiettiva del tipo appena costruito. Le sue direzioni possono essere scritte

$$(a\colon 1\colon 0)(a \in R), e(1\colon 0\colon 0).$$

Sono i punti $(a\colon 1)$ e $(1\colon 0)$ della retta proiettiva precedente, ai quali si aggiunge semplicemente la terza coordinata 0 perché ora il fascio giace nel piano $z = 0$. Essi formano la retta impropria

$\ell\infty = \{\ (a{:}1{:}0)\ : a \in \mathbb{R}\ \} \cup \{\ (1{:}0{:}0)\ \} \cong \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$.

Il punto improprio che completava la retta affine diventa così un'intera retta di punti impropri nel completamento del piano affine.

Passando dalle sezioni $z = 1$ a $z = 2$ o $z = 10$, i punti ordinari diventano rispettivamente

$$(2a, 2b, 2), (10a, 10b, 10).$$

Le rette contenute in $z = 0$ continuano naturalmente a non incontrare queste sezioni; tuttavia anche i loro rappresentanti omogenei possono essere moltiplicati per gli stessi fattori:

$$(a\colon 1\colon 0) = (2a\colon 2\colon 0) = (10a\colon 10\colon 0), (1\colon 0\colon 0) = (2\colon 0\colon 0) = (10\colon 0\colon 0).$$

La proporzionalità governa dunque nello stesso modo sia i punti ordinari sia quelli impropri.

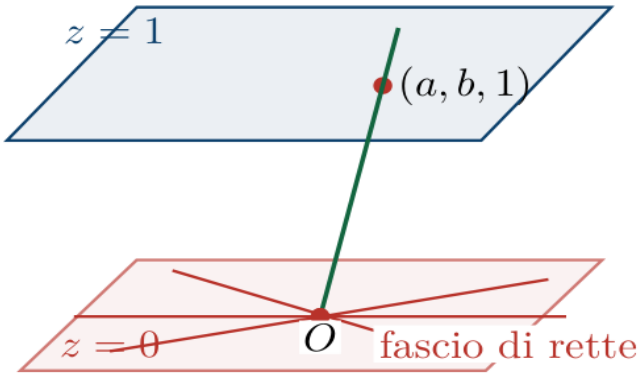


Figura 2. Le rette vettoriali che incontrano $z = 1$ danno i punti ordinari; il piano $z = 0$, che passa per l'origine, contiene invece l'intero fascio delle rette che formano la retta impropria.

In generale, in K^{n+1} si fissa l'iperpiano affine $x_{n+1} = 1$. Le rette vettoriali che lo incontrano danno i punti $(a_1 : \ldots : a_n : 1)$; quelle contenute in $x_{n+1} = 0$ danno i punti $(a_1 : \ldots : a_n : 0)$, che costituiscono un iperpiano improprio isomorfo a $P^{n-1}(K)$. In forma sintetica,

$$P^n(K) = K^n \cup P^{n-1}(K).$$

Questa costruzione mostra direttamente l'equivalenza fra le due introduzioni tradizionali: completare lo spazio affine aggiungendo le direzioni significa considerare le rette vettoriali per l'origine, ossia le classi di vettori proporzionali.

5. Coordinate omogenee: punti e rette hanno la stessa natura

Sia K un campo. Il piano proiettivo coordinatizzato $P^2(K)$ è l'insieme dei sottospazi vettoriali unidimensionali di K^3. Un suo punto è dunque rappresentato da un vettore non nullo

$x = (x_0, x_1, x_2) \in K^3 \setminus \{0\}$,

ma vettori proporzionali rappresentano lo stesso punto:

$$(x_0 : x_1 : x_2) = (\lambda x_0 : \lambda x_1 : \lambda x_2), \lambda \in K^{\times}.$$

È importante non presentare questa identificazione come una stranezza da accettare. La domanda didattica corretta è: abbiamo già incontrato oggetti geometrici descritti da coefficienti definiti soltanto a meno di un fattore non nullo? La risposta è sì, e riguarda le rette.

Una retta affine ha equazione

$$ax + by + c = 0.$$

Le equazioni

$$ax + by + c = 0 e \lambda ax + \lambda by + \lambda c = 0, \lambda \neq 0,$$

descrivono la stessa retta. Non contano quindi i singoli coefficienti, ma i loro rapporti. Possiamo rappresentare la retta mediante la classe

$$(a : b : c) = (\lambda a : \lambda b : \lambda c).$$

La tabella seguente esplicita il parallelismo concettuale.

	Punto	Retta
Rappresentante	$x = (x_0,x_1,x_2) \neq 0$	$a = (a,b,c) \neq 0$
Equivalenza	$x \sim \lambda x$	$a \sim \lambda a$
Classe	$(x_0:x_1:x_2)$	(a:b:c)

Questa è una soglia didattica decisiva. Lo studente non deve più pensare che un punto "sia tre numeri". Il punto è una classe di terne proporzionali, esattamente come la retta è una classe di equazioni proporzionali.

Nel piano proiettivo la retta $(a: b: c)$ è costituita dai punti $(x_0: x_1: x_2)$ che soddisfano

$$ax_0 + bx_1 + cx_2 = 0.$$

In forma matriciale, posto $a = (a, b, c)$ e $x = (x_0, x_1, x_2)^T$, l'incidenza si scrive

$$ax = 0.$$

Lo scambio fra coordinate del punto e coefficienti della retta non distrugge la forma della relazione: è la porta d'ingresso alla dualità.

Attività 2 (La stessa retta, lo stesso punto). Si assegnano tre equazioni proporzionali di una retta e tre terne proporzionali di un punto. Gli studenti devono spiegare, senza limitarsi al calcolo, perché nei due casi la moltiplicazione per uno scalare non nullo non modifica l'oggetto geometrico. L'obiettivo è far emergere la frase "la scala non conta" come principio comune.

6. Assiomi e dualità

Un piano proiettivo può ora essere introdotto a partire dalla stessa base. È uno spazio lineare nel quale:

- due rette distinte hanno un punto comune;
- ogni retta contiene almeno tre punti distinti.

L'unicità del punto comune deriva già dall'assioma **(L1)**: due rette distinte non possono contenere due punti comuni. La seconda condizione esclude le strutture degeneri.

I primi due assiomi si trasformano l'uno nell'altro scambiando le parole "punto" e "retta". Questo suggerisce il principio di dualità: da un enunciato di incidenza si ottiene l'enunciato duale scambiando punti e rette, appartenenza e passaggio, allineamento e concorrenza.

Enunciato	**Enunciato duale**
Punto	retta
due punti determinano una retta	due rette determinano un punto
punti allineati	rette concorrenti
Triangolo	trilatero

La dualità non è un gioco terminologico. Essa mostra che la teoria dell'incidenza possiede una simmetria interna. La rappresentazione comune di punti e rette mediante classi di terne rende questa simmetria visibile prima ancora di formularla in termini astratti.

7. Desargues come punto di svolta

Consideriamo due triangoli ABC e $A'B'C'$. Essi sono in prospettiva da un punto se le rette AA', BB', CC' sono concorrenti. Sono in prospettiva da una retta se i tre punti

$$AB \cap A'B', AC \cap A'C', BC \cap B'C'$$

sono allineati.

Teorema 5 (Desargues). Se due triangoli sono in prospettiva da un punto, allora sono in prospettiva da una retta.

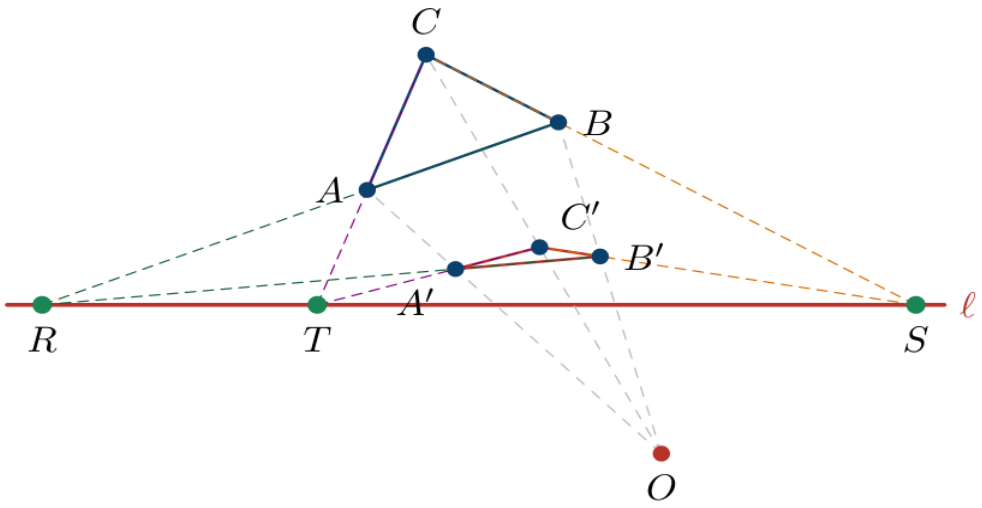


Figura 3. La configurazione di Desargues: la prospettività dal punto O implica l'allineamento dei tre punti R, S, T d'intersezione dei lati corrispondenti.

In $P^2(K)$ il teorema può essere dimostrato mediante coordinate. Ma questa dimostrazione non autorizza a concludere che Desargues derivi dai soli assiomi di piano proiettivo: essa dimostra il teorema in uno specifico modello coordinatizzato.

Qui si presenta un'occasione didattica rara. La distinzione fra teoria e modello, spesso percepita come puramente logica, acquista contenuto geometrico: esistono piani proiettivi nei quali Desargues non vale. Chiedere se il teorema sia "vero" non basta; occorre chiedere in quale struttura e a partire da quali ipotesi.

8. Oltre il piano: gli spazi proiettivi

Prima di introdurre le coordinate, conviene definire lo spazio in modo sintetico. Seguendo l'impostazione di Veblen e Young, ripresa in [4], uno *spazio proiettivo di dimensione* $n \geq 2$ è uno spazio lineare (P, L) tale che:

se A_1, A_2, B_1, B_2 sono quattro punti distinti e le rette A_1A_2 e B_1B_2 si incontrano, allora si incontrano anche A_1B_1 e A_2B_2;

ogni retta contiene almeno tre punti distinti;

l'intero spazio è generato da $n + 1$ punti, ma non da un numero minore di punti.

Il primo assioma è l'*assioma di Veblen–Young*. La figura 4 ne mostra la configurazione d'incidenza: non esprime misure o angoli, ma soltanto appartenenze e intersezioni.

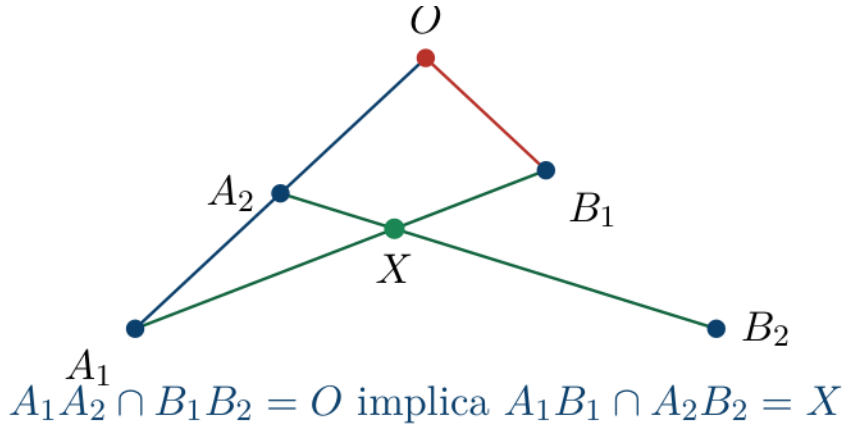


Figura 4. L'assioma di Veblen–Young. L'incontro di A_1A_2 e B_1B_2 forza l'incontro delle rette incrociate A_1B_1 e A_2B_2.

Un sottospazio è un insieme di punti chiuso rispetto alla congiunzione: se contiene due punti distinti, contiene l'intera retta che li unisce. Dire che alcuni punti generano lo spazio significa che nessun sottospazio proprio li contiene tutti. Per $n \geq 3$, l'ultimo assioma implica l'esistenza di almeno due rette disgiunte; nel piano, invece, due rette distinte si incontrano sempre. È proprio questa differenza a rendere la dimensione geometricamente decisiva.

Osservazione 6 (Una semplificazione didattica). Dopo aver presentato la definizione formale, non è necessario continuare a chiedere quale sia la dimensione esatta dello spazio. Se l'obiettivo è distinguere il piano dagli spazi nei quali Desargues è automatico, si può sostituire l'assioma **(S3)** con la condizione più immediata

esistono due rette ad intersezione vuota.

In questo modo il contrasto diventa visibile: nel piano ogni coppia di rette distinte ha un punto comune; nello spazio di dimensione almeno 3 possono esistere rette disgiunte. La dimensione esatta passa così in secondo piano, mentre resta in evidenza la differenza strutturale necessaria al percorso.

Il passaggio dal piano allo spazio non è soltanto una generalizzazione formale. Cambia lo statuto del teorema di Desargues.

Teorema 7. In ogni spazio proiettivo di dimensione almeno 3, il teorema di Desargues vale per ogni configurazione piana.

Idea geometrica della dimostrazione. La configurazione può essere interpretata mediante piani e rette in uno spazio tridimensionale. Se i due triangoli giacciono in piani distinti, le intersezioni delle coppie di lati corrispondenti appartengono sia al primo sia al secondo piano; esse giacciono quindi sulla retta intersezione dei due piani. Quando i triangoli sono complanari, si sceglie un punto esterno al loro piano e si "solleva" opportunamente uno dei triangoli. Il caso piano viene così ricondotto al caso spaziale.

La frase "si dimostra uscendo dal piano" ha un forte valore formativo: una dimensione aggiuntiva trasforma una proprietà non forzata dagli assiomi piani in una conseguenza inevitabile degli assiomi dello spazio.

Più precisamente, il teorema di coordinatizzazione di Veblen–Young mostra che ogni spazio proiettivo assiomatico di dimensione almeno 3 è isomorfo a $P^n(K)$ per un corpo K, non necessariamente commutativo. In tale contesto Desargues è automatico. Per un piano astratto, invece, la validità di Desargues equivale alla possibilità di ottenere una coordinatizzazione di questo tipo.

Osservazione 8. Un piano proiettivo non desarguesiano non può essere immerso come piano in uno spazio proiettivo di dimensione almeno 3. Se lo fosse, erediterebbe Desargues dallo spazio ambiente.

9. Il valore didattico dei piani non desarguesiani

I piani non desarguesiani non devono necessariamente essere costruiti in ogni dettaglio in un primo percorso. È già istruttivo comprenderne il ruolo. Mostrano infatti che:

gli assiomi di incidenza del piano non determinano un unico modello;

le coordinate su un campo non sono un dato inevitabile;

aggiungere un teorema come assioma restringe la classe dei modelli;

proprietà geometriche diverse corrispondono a strutture algebriche diverse.

9.1 Il piano di Moulton: un ponte visivo con la fisica

Un esempio particolarmente efficace in chiave didattica è il piano affine di Moulton, introdotto nel 1902 [9]. I suoi punti sono gli usuali punti di R^2; le rette sono in gran parte quelle ordinarie, ma una famiglia di rette cambia pendenza quando attraversa un asse fissato. Con una scelta coerente della regola di cambiamento, gli assiomi del piano affine continuano a valere, mentre il teorema di Desargues fallisce. Il completamento proiettivo del piano di Moulton fornisce pertanto un piano proiettivo non desarguesiano .

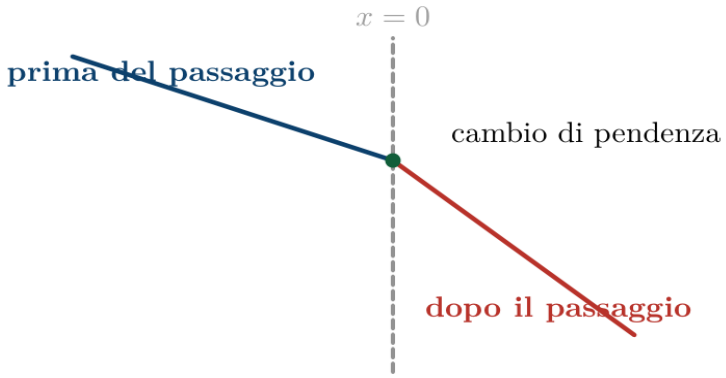


Figura 5. Nel piano di Moulton alcune rette cambiano pendenza attraversando l'interfaccia $x = 0$. La figura suggerisce un'analogia qualitativa con la rifrazione di un raggio luminoso fra due mezzi.

Il collegamento con la fisica è soprattutto visivo e concettuale: come nella rifrazione, la direzione cambia attraversando un'interfaccia. Non si sta identificando la costruzione di Moulton con la legge di Snell; l'analogia serve a mostrare come una modifica locale della nozione di retta possa produrre una geometria globale diversa. In questo senso il piano di Moulton offre un ponte immediato fra geometria assiomatica, modellizzazione e ottica.

Prima di nominare i piani pappiani conviene introdurre la configurazione geometrica da cui prendono il nome. Il teorema di Pappo parte da sei punti disposti su due rette. Se $A, B, C \in r$ e $A', B', C' \in r'$, i tre punti

$$X = AB' \cap A'B, Y = AC' \cap A'C, Z = BC' \cap B'C$$

sono allineati. La figura 6 permette di leggere l'enunciato prima ancora di formalizzarlo.

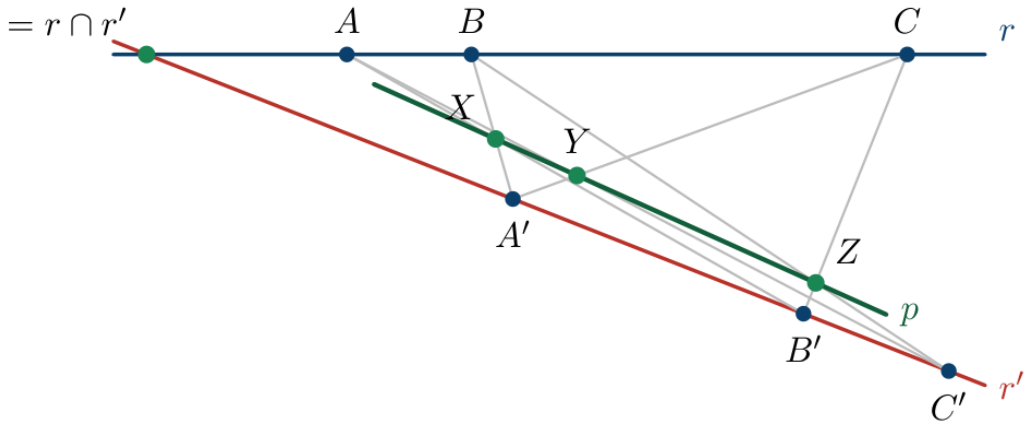


Figura 6. La configurazione di Pappo: i tre punti X, Y, Z, ottenuti incrociando le congiungenti dei punti sulle due rette, sono allineati.

In un piano desarguesiano coordinatizzato su un corpo, la validità di Pappo equivale alla commutatività delle coordinate. Si chiama quindi *pappiano* un piano nel quale vale il teorema di Pappo. La configurazione geometrica individua così il passaggio dai corpi ai campi e prepara il significato dell'ultimo livello della gerarchia seguente.

Questa progressione può essere sintetizzata, senza entrare subito nei dettagli tecnici, mediante la catena

piani proiettivi ⊃ piani di traslazione ⊃ piani di Moufang ⊃ piani desarguesiani ⊃ piani pappiani.

La catena va presentata come una mappa orientativa, precisando che a ciascun passaggio corrispondono ipotesi specifiche e differenti strumenti di coordinatizzazione.

9.2 Un breve promemoria algebrico

Per leggere la catena precedente è sufficiente ricordare quali assiomi vengono progressivamente indeboliti.

Campo	$(K, +)$ è un gruppo abeliano, $K^\times = K \setminus \{0\}$ è un gruppo abeliano e valgono le due leggi distributive

$$a(b+c) = ab + ac, (a+b)c = ac + bc.$$

Corpo	Valgono gli stessi assiomi, salvo la commutatività della moltiplicazione: $K^\times$ è un gruppo non necessariamente abeliano. La moltiplicazione resta associativa.
Corpo alternativo	La moltiplicazione non è necessariamente associativa, ma soddisfa le leggi alternative $x(xy) = x^2y$ e $(yx)x = yx^2$, oltre alle opportune proprietà di divisione e distributività. È la struttura collegata ai piani di Moufang.
Quasi-corpo	La definizione dipende dalla convenzione destra o sinistra; in sostanza la moltiplicazione può non essere associativa e si conserva una sola legge distributiva, insieme alle condizioni di risolubilità necessarie per coordinatizzare un piano di traslazione.

Il quadro algebrico rende leggibile quello geometrico: quanto più si indeboliscono le leggi delle coordinate, tanto più ampia diventa la classe dei piani ammessi.

9.3 Piani di traslazione

Un piano proiettivo è un *piano di traslazione rispetto a una retta* l_∞ se il gruppo delle collineazioni che fissano punto per punto l_∞ agisce transitivamente, e in realtà regolarmente, sui punti del piano affine ottenuto eliminando l_∞. La retta l_∞ non è quindi soltanto un insieme aggiunto per completare il piano affine: diventa una struttura privilegiata rispetto alla quale si riconoscono le traslazioni.

Dal punto di vista algebrico, questi piani si coordinatizzano mediante quasi-corpi. Rispetto a un campo, alcune proprietà distributive o associative sono indebolite; geometricamente, questo indebolimento permette la comparsa di piani non desarguesiani. Un piano desarguesiano è un piano di traslazione rispetto a ogni sua retta, mentre un piano di traslazione generale può possedere una retta di traslazione privilegiata.

9.4 Piani di Moufang

Nel passaggio ai piani di Moufang si rafforza la geometria imponendo il *piccolo teorema di Desargues* per ogni scelta della retta privilegiata. In termini di trasformazioni, il piano possiede un numero sufficiente di elazioni: fissata una retta come asse, le elazioni corrispondenti agiscono transitivamente sui punti appropriati. Questa proprietà locale è più debole del teorema di Desargues completo, ma molto più forte dei soli assiomi d'incidenza.

Il teorema di Moufang–Hall traduce la condizione geometrica in algebra: i piani di Moufang sono coordinatizzabili mediante corpi alternativi. Se il corpo è associativo si ritrovano i piani desarguesiani; gli ottonioni forniscono invece l'esempio guida di un piano di Moufang non desarguesiano, il piano di Cayley. Didatticamente, questo esempio mostra che un teorema locale può corrispondere a una legge algebrica intermedia fra assenza di associatività e associatività completa.

10. Prospettività e proiettività

Prima di usare la costruzione di Steiner è opportuno precisare il significato di *proiettività*. Siano r e r' due rette e sia O un punto che non appartiene a esse. La corrispondenza

$$r \to r', P \mapsto OP \cap r',$$

si chiama *prospettività* di centro O. Essa associa a ogni punto di r il punto in cui la retta OP incontra r'. Dualmente, una prospettività fra due fasci di rette si ottiene intersecando le rette del primo fascio con un asse e congiungendo i punti ottenuti con il centro del secondo fascio.

Definizione 9. Una *proiettività* fra due rette proiettive, o fra due fasci di rette, è una corrispondenza ottenuta come composizione di un numero finito di prospettività.

Un fascio di rette può dunque essere considerato esso stesso come una retta proiettiva: le sue "coordinate" descrivono le direzioni delle rette del fascio. Nel caso coordinatizzato su un campo K, una proiettività della retta

$P^1(K)$ è rappresentata, a meno di un fattore scalare non nullo, da una matrice invertibile 2×2:

$$(x_0 : x_1) \mapsto (ax_0 + bx_1 : cx_0 + dx_1), (a\ b\ c\ d\ ) \in GL(2, K).$$

Due matrici che differiscono per un fattore scalare non nullo determinano la stessa proiettività; il gruppo delle proiettività della retta è quindi $PGL(2, K)$. Nella carta affine $x = x_0/x_1$, la stessa corrispondenza assume la forma

$$x \mapsto \frac{ax + b}{cx + d}, ad - bc \neq 0.$$

In particolare, tre punti distinti e tre immagini distinte determinano un'unica proiettività. Didatticamente questa proprietà consente di costruire la corrispondenza scegliendo soltanto tre coppie di elementi e di seguire poi le immagini mediante proiezioni successive.

11. Dalle coniche affini alle coniche degeneri

Nella scuola secondaria le coniche vengono generalmente incontrate nel piano affine reale come ellissi, iperboli e parabole. Pur avendo forme geometriche molto diverse, esse sono tutte descritte da un'equazione di secondo grado

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Questa osservazione permette un ampliamento immediato. Se

$$r_i(x, y) = a_i x + b_i y + c_i (i = 1,2)$$

sono i polinomi lineari che definiscono due rette, allora

$$r_1(x, y) r_2(x, y) = 0$$

è ancora un'equazione di secondo grado. Il suo luogo è però l'unione delle due rette $r_1 = 0$ e $r_2 = 0$; le rette possono anche coincidere. Si ottiene così una *conica degenere*. La nozione non viene quindi introdotta come un'eccezione artificiale, ma nasce applicando alle rette il medesimo criterio algebrico già usato per le coniche ordinarie.

Omogeneizzando, una conica del piano proiettivo ha equazione quadratica

$$Q(x_1, x_2, x_3) = 0.$$

Quando Q è il prodotto di due forme lineari omogenee, la conica è degenere ed è costituita da due rette, eventualmente coincidenti. Questo ponte fra il linguaggio scolastico e quello proiettivo prepara direttamente la costruzione di Steiner.

12. Steiner (1832): costruire una conica con due fasci di rette

Nel 1832 Steiner pubblica la sua costruzione sintetica delle coniche nella *Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander* [10]. La conica può così essere introdotta sinteticamente, senza partire da un'equazione quadratica. Siano A e B due punti distinti e siano S_A, S_B i fasci di rette con centri A e B. Consideriamo una proiettività

$$\varphi: S_A \to S_B$$

che non mandi la retta AB in sé. Il teorema di Steiner afferma che il luogo

$$C = \{l \cap \varphi(l) : l \in S_A\}$$

è una conica non degenere passante per A e B. Viceversa, una conica e due suoi punti distinti determinano in questo modo una proiettività fra i due fasci.

12.1 Perché compare un'equazione di secondo grado

La dimostrazione coordinata è breve e istruttiva. Scegliamo

$$A = (1:0:0), B = (0:0:1).$$

Le rette del fascio di centro A si possono scrivere

$$l_{u,v}: ux_2 + vx_3 = 0, (u:v) \in P^1(K).$$

Una proiettività fra il fascio di centro A e quello di centro B è rappresentata da una matrice invertibile

$$M = (\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta).$$

Alla retta $l_{u,v}$ corrisponde quindi la retta per B

$$\varphi(l_{u,v}): (\alpha u + \beta v)x_1 + (\gamma u + \delta v)x_2 = 0.$$

Un punto $X = (x_1 : x_2 : x_3)$ appartiene all'intersezione di due rette corrispondenti se esiste una coppia $(u, v) \neq (0,0)$ che risolve il sistema omogeneo

$$\{ux_2 + vx_3 = 0, u(\alpha x_1 + \gamma x_2) + v(\beta x_1 + \delta x_2) = 0.\}$$

È importante distinguere i ruoli: u, v sono le incognite del sistema e variano al variare della retta del primo fascio; x_1, x_2, x_3 sono le coordinate del punto X. Il sistema ammette una soluzione non nulla precisamente quando

$$det(x_2\ x_3\ \alpha x_1 + \gamma x_2\ \beta x_1 + \delta x_2\ ) = 0.$$

Sviluppando il determinante si ottiene

$$\beta x_1 x_2 + \delta x_2^2 - \alpha x_1 x_3 - \gamma x_2 x_3 = 0,$$

un'equazione omogenea di secondo grado nelle coordinate del punto. Il luogo delle intersezioni è dunque una conica proiettiva.

La condizione sulla retta AB separa anche in modo naturale i due casi. Se AB non corrisponde a se stessa, si ottiene una conica non degenere. Se invece AB è una retta unita della corrispondenza, la costruzione degenera: le intersezioni delle altre coppie di rette corrispondenti risultano allineate e la conica si spezza in una coppia di rette. Coniche degeneri e non degeneri emergono così dalla stessa procedura, variando una sola condizione della proiettività.

Nelle coordinate scelte, la retta AB ha equazione $x_2 = 0$. Essa è unita se e solo se $\alpha = 0$; in tal caso la quadratica precedente si fattorizza:

$$x_2(\beta x_1 + \delta x_2 - \gamma x_3) = 0.$$

Ritroviamo esattamente una coppia di rette. Se invece $\alpha \neq 0$, poiché $detM \neq 0$, la conica è non degenere. La stessa dimostrazione spiega quindi entrambi i casi senza cambiare costruzione.

12.2 I casi limite e la classificazione senza metrica

La costruzione comprende anche degenerazioni ulteriori. Se i due centri coincidono, $A = B$, le rette corrispondenti appartengono allo stesso fascio. Il luogo è allora governato dalle rette unite della proiettività: oltre alla coppia di rette già incontrata, si possono ottenere una retta contata due volte e, quando non vi sono rette unite reali, il solo punto A. In questo modo la costruzione di Steiner produce tutte le coniche reali, degeneri e non degeneri, con una sola eccezione: l'*ellisse vuota*, che non possiede punti reali e non può quindi nascere come luogo di intersezioni di rette reali.

Questo fatto suggerisce un secondo passaggio didattico. Fissata la retta impropria l_∞, si può chiamare:

$$\texttt{ellisse: C} \cap \ell\infty = \emptyset;$$

$$\text{parabola: } \ell\infty \text{ è tangente a C;}$$

$$\text{iperbole: } \ell\infty \text{ è secante a C.}$$

La classificazione vale anche per le coniche degeneri, interpretando intersezioni e tangenze con le rispettive molteplicità. Le tre famiglie studiate a scuola emergono così da un unico criterio d'incidenza, senza introdurre distanze, fuochi o direttrici e senza formulare tre definizioni metriche separate nel piano euclideo.

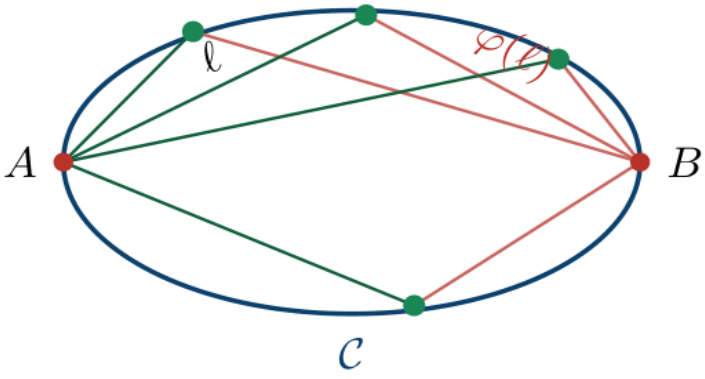


Figura 7. La costruzione di Steiner: le intersezioni delle rette corrispondenti l e $\varphi(l)$ descrivono la conica C.

Questa costruzione è particolarmente adatta al percorso proposto. Dopo aver visto che un punto proiettivo è una direzione vettoriale e che una proiettività conserva l'incidenza, la conica appare come il risultato dinamico

di una corrispondenza fra rette. Pascal può allora essere presentato non come un teorema isolato su un'equazione di secondo grado, ma come una proprietà d'incidenza di una figura già costruita proiettivamente.

Ci fermiamo qui, nel percorso principale, alla costruzione di Steiner delle coniche, degeneri e non degeneri. È tuttavia utile indicare con precisione la successione storica delle generalizzazioni. In un primo momento si conserva la proiettività e si passa alle stelle di rette in dimensione superiore: in dimensione 3 Seydewitz (1847) mostra che la costruzione conduce alla cubica gobba e, nel caso degenere, all'unione di una conica e di una retta. In dimensione $n > 3$, Clifford (1878) e, indipendentemente, Veronese (1882) mostrano che essa conduce più in generale alla curva razionale normale [3]. Solo in un secondo momento la proiettività viene sostituita da opportune collineazioni. Questa ulteriore generalizzazione, sviluppata da Donati e Durante negli spazi proiettivi finiti [3], produce nuovi insiemi geometrici e trova applicazione anche nella costruzione di codici MRD non lineari. Il richiamo mostra come una costruzione classica continui naturalmente verso problemi geometrici e combinatori contemporanei, senza allontanare il percorso dal suo obiettivo didattico.

13. Pascal: dalla configurazione di Pappo alle coniche

Il teorema di Pascal presenta una struttura affine ma sostituisce le due rette con una conica. Dati sei punti A, B, C, D, E, F su una conica, le intersezioni delle tre coppie di lati opposti dell'esagono,

$$X = AB \cap DE, Y = BC \cap EF, Z = CD \cap FA,$$

sono allineate sulla retta di Pascal.

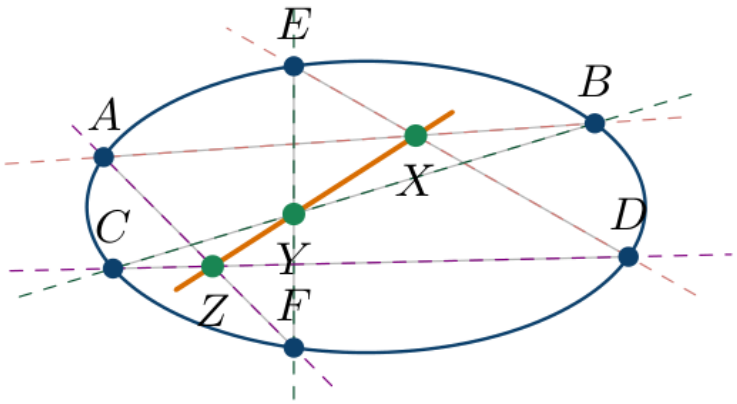


Figura 8. La configurazione di Pascal: un esagono inscritto in una conica e la retta che contiene X, Y, Z.

Didatticamente è utile accostare i due risultati: facendo degenerare la conica in una coppia di rette, Pascal conduce a Pappo. La trasformazione del disegno fa emergere una relazione fra teoremi che una presentazione esclusivamente verbale tende a nascondere.

14. Piani finiti: esempi piccoli, domande grandi

I piani proiettivi finiti rendono concreta la teoria assiomatica. Un piano di ordine q possiede

$$q^2 + q + 1$$

punti e altrettante rette; ogni retta contiene $q + 1$ punti e per ogni punto passano $q + 1$ rette.

Per ogni potenza di primo $q = p^h$ esiste il campo di Galois F_q e, a partire dallo spazio vettoriale F_q^3, si costruisce il piano

$$PG(2, q) = P^2(F_q).$$

Si ottiene così, per ogni q potenza di primo, un piano proiettivo di ordine q che è desarguesiano e pappiano. Il punto importante non è soltanto l'esistenza di questi esempi, ma il fatto che nel caso finito due livelli della gerarchia precedente coincidano. Un piano desarguesiano è coordinatizzato da un corpo, eventualmente non commutativo; il piccolo teorema di

Wedderburn afferma però che ogni corpo finito è commutativo, dunque è un campo. Ne segue che un piano proiettivo finito è desarguesiano se e soltanto se è pappiano [2, 7].

Nel caso finito anche il livello di Moufang non produce nuovi piani. Infatti un piano di Moufang è coordinatizzato da un corpo alternativo e il teorema di Artin–Zorn afferma che ogni corpo alternativo finito è un campo. Pertanto, per i piani finiti,

$$Moufang \Leftrightarrow desarguesiano \Leftrightarrow pappiano.$$

Questa coincidenza è una peculiarità della finitezza: sul campo reale gli ottonioni danno invece il piano di Cayley, che è di Moufang ma non desarguesiano.

La classe dei piani di traslazione rimane invece più ampia anche nel caso finito. Esistono piani di traslazione finiti non desarguesiani, coordinatizzati da quasi-corpi che non sono campi; i piani di Hall ne costituiscono una famiglia classica. Si vede così con particolare chiarezza che la proprietà di traslazione, pur imponendo una forte omogeneità rispetto alla retta all'infinito, non basta a forzare Desargues.

Il più piccolo esempio è il piano di Fano $P^2(F_2)$, con sette punti e sette rette. La sua dimensione contenuta permette di verificare direttamente gli assiomi, sperimentare la dualità e discutere la differenza fra il disegno euclideo e la struttura d'incidenza: la "circonferenza" che compare nella rappresentazione usuale è una retta del piano di Fano.

Attività 3 (Costruire il piano di Fano). Gli studenti ricevono sette punti etichettati e devono organizzare sette terne in modo che ogni coppia di punti compaia in una e una sola terna. Le terne saranno interpretate come rette. Dopo la costruzione si contano le incidenze e si formula il principio duale. L'attività può essere proposta sia come problema combinatorio sia come verifica del modello coordinato su F_2.

Gli esempi finiti aprono inoltre questioni autentiche: non tutti gli ordini sono possibili, e il problema dell'esistenza di un piano proiettivo di un dato

ordine è in generale profondo. Il messaggio didattico è importante: una definizione elementare può generare problemi di ricerca non elementari.

15. Una possibile sequenza di insegnamento

Il percorso può essere organizzato in sette passaggi.

Problema visivo. Prospettiva, rette parallele e punti di fuga.

Completamento. Dal piano affine al piano proiettivo.

Coordinate. Terne omogenee e proporzionalità.

Simmetria. Punti e rette come classi di terne non nulle.

Assiomi e dualità. Dalla rappresentazione al linguaggio sintetico.

Desargues e dimensione. Teorema nel modello coordinato, possibile fallimento nei piani astratti, validità automatica negli spazi di dimensione almeno tre.

Modelli finiti. Il piano di Fano e le domande di esistenza.

La sequenza alterna intenzionalmente tre registri:

$$figura \leftrightarrow assiomi \leftrightarrow coordinate.$$

Nessuno dei tre deve diventare dominante. Le figure motivano e suggeriscono, gli assiomi chiariscono quali proprietà sono disponibili, le coordinate permettono di calcolare e classificare.

16. Nodi concettuali e possibili equivoci

Il punto improprio non è "molto lontano".

Non è un punto metrico posto a distanza infinita, ma rappresenta una direzione.

Una terna non è un punto.

La terna è un rappresentante; il punto è la classe di tutte le terne proporzionali non nulle.

Una figura non è una dimostrazione.

Il disegno di Desargues mostra la configurazione, ma l'allineamento conclusivo richiede una dimostrazione o un assioma.

Vero in $P^2(K)$ non significa vero in ogni piano proiettivo.

Le coordinate su un campo incorporano proprietà algebriche aggiuntive.

Lo spazio non è soltanto "più grande".

La dimensione almeno tre produce nuove possibilità d'incidenza e forza il teorema di Desargues.

17. Conclusioni

La geometria proiettiva è didatticamente efficace quando non viene ridotta a un elenco di definizioni. Il suo valore emerge dalla continuità fra prospettiva, incidenza, coordinate e algebra. In questa continuità, l'osservazione che punti e rette condividono la stessa natura coordinata costituisce un passaggio particolarmente produttivo: rende naturali le coordinate omogenee, prepara la dualità e riduce la sensazione di artificio.

Il teorema di Desargues porta poi il percorso a un livello ulteriore. Nel piano esso separa i modelli coordinatizzabili su corpi dai piani più generali; negli spazi proiettivi di dimensione almeno tre diventa inevitabile. La differenza fra piano e spazio rende visibile una delle idee centrali della matematica: una proprietà può dipendere non soltanto dagli oggetti considerati, ma anche dalla struttura ambiente e dagli assiomi disponibili.

Bibliografia

H. S. M. Coxeter (1087) *Projective Geometry*, 2nd ed., Springer, New York.

P. Dembowski (1968) *Finite Geometries*, Springer, Berlin.

G. Donati, N. Durante (2018) *A generalization of the normal rational curve in $PG(d, q^n)$ and its associated non-linear MRD codes*, Designs, Codes and Cryptography **86**, 1175–1184.

N. Durante, F. Polizzi (2026) *I piani proiettivi*, sottoposto per la pubblicazione.

R. Hartshorne (1967) *Foundations of Projective Geometry*, W. A. Benjamin, New York.

D. Hilbert (1899) *Grundlagen der Geometrie*, Teubner, Leipzig.

D. R. Hughes, F. C. Piper (1973) *Projective Planes*, Springer, New York.

H. Lenz (1954) *Zur Begründung der analytischen Geometrie*, Sitzungsberichte der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse, 17–72.

F. R. Moulton (1902) *A Simple Non-Desarguesian Plane Geometry*, Transactions of the American Mathematical Society **3**, no. 2, 192–195.

J. Steiner (1832) *Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander*, G. Fincke, Berlin.

O. Veblen, J. W. Young (1908) *A Set of Assumptions for Projective Geometry*, American Journal of Mathematics **30**, no. 4, 347–380.

O. Veblen, J. W. Young (1910-1918), *Projective Geometry*, Vols. I–II, Ginn and Company, Boston.

Un affresco della vita matematica napoletana tra il 1732 e il 1778.

Franco Eugeni
Presidente dell'Accademia di Filosofia delle Scienze Umane
Eugenif3@gmail.com

Sunto- *Lo Studio di Napoli (o* Studium*) fu l'antico nome dell'attuale Università degli Studi di Napoli, fondata il 5 giugno 1224 dall'Imperatore del Sacro Romano Impero e Re di Sicilia, Federico II di Svevia. Dalla sua istituzione ufficiale formale, il percorso per ottenere la Laurea in Matematica a Napoli ha subito una serie di metamorfosi radicali. Prima dell'Ottocento non esisteva un corso di Laurea in materie scientifiche autonomo. La Matematica passò dall'essere un semplice insegnamento filosofico-giuridico a una facoltà indipendente basata su esami rigorosi e dispute di metodo. La creazione di un percorso formativo vicino all'attuale, si articola in quattro periodi principali:*

1. Fino alla fine del Settecento, nello Studio di Napoli, non esisteva la figura del "Dottore in Matematica". La cattedra di matematica (ricoperta da figure di genio quali Tommaso Cornelio o Niccolò Di Martino) forniva esami propedeutici obbligatori per chi voleva laurearsi in Giurisprudenza Medicina.

2. La prima ed unica cattedra di Matematica viene istituita nel 1753. Il primo sdoppiamento, con la creazione di una seconda cattedra di astronomia, e ancora dopo di una terza in Algebra avvengono alla fine del settecento, sono occupate da personaggi illustri e di grande valore.

3.- Sotto Ferdinando IV di Borbone nacque la prima Facoltà di Matematica, divisa in cattedre specifiche, tra cui Matematica Sintetica, Matematica Analitica, Astronomia, Meccanica ed uno/due insegnamenti di Fisica. Agli inizi dell'Ottocento, il funzionamento degli studi matematici a Napoli era fortemente legato alle scuole private dei grandi maestri (come quella di Nicola Fergola). Gli studenti frequentavano prima queste accademie private per prepararsi e poi sostenevano presso lo Studio di Napoli (Università) gli esami ufficiali per ottenere il titolo. Non esistevano esami intermedi di profitto, era la scuola privata che presentava l'allievo. La prova finale consisteva in una disputa pubblica. Lo studente doveva difendere delle tesi geometriche o analitiche davanti al corpo docente. La laurea in Ingegneria non esisteva, ci si laureava in Matematica e poi la nomina ad Ingegnere era del Re. Sotto Re Giocchino Murat nasce la scuola e il Corpo di Strade e Ponti e Strade.

4. Il 29 novembre 1811, con la riforma di Re Gioacchino Murat lo Studio di Napoli riceve una veste giuridica moderna e viene strutturato stabilmente, mutando il nome

in Università (di Napoli) e sono definite cattedre, facoltà e organigramma amministrativo centralizzato. Con l'Unità d'Italia e l'stensione della piemontese Legge Casati, acquista il nome di Regia Università di Napoli.

Parole chiave: Studio di Napoli, Cattedra di Matematica, Sistema di Valutazione, Ratio Studiorum

Abstract- *The Studio di Napoli (or Studium) was the ancient name of the current University of Naples, founded on June 5, 1224, by the Holy Roman Emperor and King of Sicily, Frederick II of Swabia. Since its official formal establishment, the path to obtaining a Degree in Mathematics in Naples has undergone a series of radical metamorphoses. Before the nineteenth century, an autonomous degree program in scientific subjects did not exist. Mathematics evolved from being a simple philosophical-legal teaching into an independent faculty based on rigorous examinations and disputes over method. The creation of a training curriculum close to the current one is divided into four main periods:*

1. Until the end of the eighteenth century, the title of "Doctor of Mathematics" did not exist at the Studio di Napoli. The chair of mathematics (held by geniuses such as Tommaso Cornelio or Niccolò Di Martino) provided mandatory preparatory exams for those wishing to graduate in Law or Medicine.

2. The first and only chair of Mathematics was established in 1753. The first split, which led to the creation of a second chair in astronomy and later a third in Algebra, occurred at the end of the eighteenth century; these positions were occupied by illustrious and highly distinguished figures.

3. Under Ferdinand IV of Bourbon, the first Faculty of Mathematics was born, divided into specific chairs, including Synthetic Mathematics, Analytical Mathematics, Astronomy, Mechanics, and one or two Physics courses. In the early nineteenth century, the functioning of mathematical studies in Naples was strongly linked to the private schools of great masters (such as that of Nicola Fergola). Students would first attend these private academies to prepare themselves and then take the official examinations at the Studio di Napoli (University) to obtain their degree. There were no intermediate mid-term exams; it was the private school that presented the student. The final exam consisted of a public dispute, during which the student had to defend geometrical or analytical theses before the faculty body. A degree in Engineering did not exist; one graduated in Mathematics, and the appointment as an Engineer was subsequently granted by the King. Under King Joachim Murat, the School and the Corps of Roads and Bridges (Corpo di Ponti e Strade) were established.

4. On November 29, 1811, following the reform of King Joachim Murat, the Studio di Napoli received a modern legal structure and was permanently organized, changing its name to the University (of Naples), and defining its chairs, faculties, and centralized administrative organizational chart. With the Unification of Italy and the extension of

the Piedmontese Casati Law, it took the name of Regia Università di Napoli (Royal University of Naples).

Keywords: Naples University, Department of Mathematics, Evaluation System, Ratio Studiorum

1. Introduzione

Nell'intraprendere uno studio sulla storia degli scienziati e matematici sviluppatisi a Napoli al tempo del *Regno di Napoli* e del *Regno di Sicilia* dal 1735, divenuti il *Regno delle due Sicilie*, dopo la fine del cosiddetto *Decennio francese*, e il successivo riordino europeo del Congresso di Vienna del 1815. Terremo in conto, in questo lavoro, che i due Regni, dal 1707 al 1734 furono controllati dall'Austria con dei Viceré, fino a quando, nel 1734, Carlo di Borbone (1716 (1734) 1788), già Duca di Parma e Piacenza e figlio del Re di Spagna, Filippo V[1] (1683 (1700) 1746) e di Elisabetta Farnese (1692-1766), si impadronì dei Regni, rendendoli nuovamente indipendenti.

Filippo V

E. Farnese

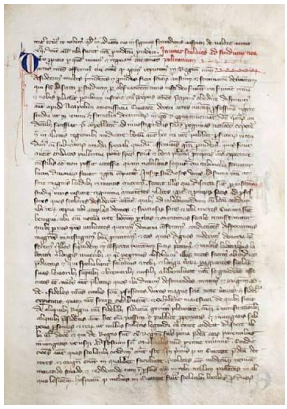
Carlo di Borbone

L'obiettivo di questa breve nota è la presentazione di un più ampio lavoro che apparirà sul mio sito : www.afsu.it, che vi presento come una "opera aperta", mirante ad una storia dettagliata di quei matematici e scienziati, dai più geniali ai più umili, che hanno operato nel periodo che ha preceduto l'unità d'Italia, a far si che i Regni di Napoli e Sicilia fossero i grandi

[1] Filippo V fu il primo Re di Spagna del casato dei Borbone.

promotori di un processo culturale, che ampliandosi notevolmente nei suoi tempi, e mediante il confronto con i Matematici di tutta Europa, portò lo *Studio di Napoli* ad essere un faro della cultura scientifica.

Federico II di Svevia


La bolla istitutiva

Il palazzo dell'Università

Il *modello scelto per questo lavoro è quello di una opera aperta*, anche in forma di ipertesto, al quale qualunque Autore *può presentare aggiunte e integrazioni*, che saranno aggiunte con il loro nome, dopo che ne sia stata fatta una attenta valutazione.

Ricordando che lo *Studio di Napoli* (o *Studium*) fu l'antico nome dell'Università cittadina, fondata il 5 giugno 1224 dall'Imperatore del Sacro Romano Impero e Re di Sicilia, Federico II di Svevia. Oggi l'istituzione è sopravvissuta nei secoli ed è conosciuta in tutto il mondo come *l'Università degli Studi di Napoli "Federico II"* che è, e rimane, la più antica[2] Università

[2] L'Alma Mater Studiorum, poi Università di Bologna, fu fondata nel 1088, ma non era pubblica.

degli studi, pubblica, del mondo, senza dimenticare che diverse Università l'hanno preceduta, con iniziative private a far data da quel 1088, anno di nascita dell'Alma Mater (Università) di Bologna.

Questa nota presenta, a grandi linee, il periodo che va dalla Fondazione dell'*Accademia delle Scienze di Napoli,* avvenuta nel 1732 alla fondazione della *Società reale* del 1778, periodo che sarà presentato in forma ben più ampia di dettagli nella citata *opera aperta* su www.afsu.it.

2. La Scienza napoletana sulla fine del 1600.

Tra il 1660 e il 1700, gli interessi culturali dello *Studio di Napoli*, vissero un momento di profondi mutamenti intellettuali, caratterizzati dal contrasto tra l'insegnamento accademico tradizionale e teorico con le nuove esigenze di una *scienza moderna* che bussava alle porte. Sebbene le cattedre ufficiali rimanessero parzialmente legate a schemi rigidi, i docenti e gli intellettuali che orbitavano attorno allo *Studio* stavano ponendo le basi per il successivo nascente *illuminismo napoletano*.

I principali filoni e interessi culturali del periodo si concentravano su quattro aree fondamentali:

a. Il diritto era il vero cuore pulsante dello *Studio di Napoli,* che in questo periodo veniva definito come una sorta di *repubblica di togati*, poiché i giuristi e i magistrati (la nobiltà di toga) erano la vera spina dorsale dell'amministrazione civile del *Viceregno spagnolo*, governato da oscuri viceré nominati dalla dinastia degli Asburgo di Spagna. Dal 1665 al 1700, Carlo II d'Asburgo (1661(1665) 1700) era Re di Spagna, e di tutti i territori del vasto Impero spagnolo, tra i quali il Regno di Napoli che era un vice-regno, strettamente legato alla corona di Madrid per ragioni storico-dinastiche. Con la morte di Carlo II, il controllo passò ai Borbone di Spagna con Filippo V. Pochi anni dopo (nel 1707) l'assetto mutò a favore degli Asburgo d'Austria fino al 1735. Lo studio del diritto romano e civile era fortemente inteso come strumento di emancipazione civile ma anche e specialmente come strumento di potere politico.

b. Il pensiero dominante era di fatto un forte *pensiero anticuriale*. I giuristi dello *Studio di Napoli* utilizzavano l'erudizione storica e legale per difendere le prerogative dello Stato e della Corona, dalle continue ingerenze della Chiesa di Roma, che tendeva a monopolizzare gli insegnamenti in ogni direzione con le scuole dei vari loro ordini. Infatti nel 1700, nel Regno di Napoli, il monopolio dell'istruzione era quasi interamente nelle mani degli *ordini religiosi*, che gestivano la quasi totalità delle scuole prima delle riforme statali borboniche della seconda metà del secolo. Tra questi ricordiamo la *Compagnia di Gesù* o *Gesuiti*, per le classi dirigenti e della nobiltà, gli *Scolopi* (Chierici Regolari Poveri della Madre di Dio delle Scuole Pie), i quali furono i pionieri dell'istruzione popolare, libera e gratuita. I *Somaschi* (Chierici Regolari di Somasca), specializzati nell'assistenza e nell'educazione degli orfani e dei ragazzi abbandonati. I *Barnabiti* (Chierici Regolari di San Paolo) che si occupavano della formazione dei giovani della media e alta borghesia attraverso collegi e scuole di stampo umanistico-scientifico. Infine i *Teatini* (Chierici Regolari Teatini) che affiancavano Gesuiti e Scolopi. A queste istituzioni si aggiungevano i *Seminari diocesani* gestiti dal clero secolare, che in molte province del Regno rappresentavano l'unica opportunità di istruzione superiore anche per i laici.

c. Sul piano filosofico e scientifico, sulla fine del Seicento a Napoli si prese conoscenza del declino definitivo dell'aristotelismo scolastico a favore delle nuove correnti europee. La diffusione della filosofia di René Descartes (1596-1650) e delle teorie atomistiche e corpuscolari propugnate dall'abate filosofo e matematico Pierre Gassendi 1592-1655) e dal fisico-chimico irlandese Robert Boyle (1627-1691). Questo interesse fu la spinta che ebbero gli stessi docenti dello Studio di Napoli, i quali al di fuori delle aule universitarie si riunivano a discuterne. Particolarmente interessante furono personaggi come il matematico Tommaso Corneli (1612 -1684/88) con lo scienziato e filosofo Leonardo di Capua (1617-1695) e lo storico Pietro Giannone (1676 –1748), che furono protagonisti assoluti della rivoluzione scientifica a Napoli. Il Corneli fondò, nelle propria abitazione, l'*Accademia*

degli Investiganti, come citato dallo storico e matematico Matteo Barbieri[3] (1743-1789), Accademia che ebbe ad occuparsi della ricerca delle verità filosofiche e naturali. Fu una delle prime accademie scientifiche d'Europa nata per promuovere lo studio della natura attraverso il metodo sperimentale.

Tommaso Cornelio

L. Di Capua

P. Giannone

d. Il settore della Medicina, che era uno degli assi portanti della cultura dello *Studio di Napoli*, scoprì l'importanza dello studio dei Corpi e subì una forte spinta al rinnovamento, allontanandosi dai dogmi di Galeno e Avicenna, cercando di fare proprie le nuove applicazioni delle leggi della fisica, della meccanica e della chimica per spiegare il funzionamento del corpo umano. Si diffusero anche le scoperte del medico inglese William Harvey (1578-1657), che fu il primo scienziato a descrivere accuratamente il sistema circolatorio umano e le proprietà del sangue, aprendo un nuovo per la medicina. Ad esempio, si promossero le prime autopsie e dissezioni pubbliche come strumenti empirici essenziali per l'insegnamento medico.

e. Negli ultimi due decenni del Seicento, si consolidò un forte interesse per la storia, la filologia e le antichità, interesse che diede vita non solo ad ampie forme di erudizione storica ma anche alla nascita di una nuova forma di critica. La storia non veniva più vista come una cronaca provvidenziale, ma come una scienza critica dei fatti umani e delle leggi. Questo specifico

[3] Cf. Barbieri Matteo (1778). *Notizie istoriche dei Matematic e Filosofi del Regno di Napoli (p. 161e seg.),* copia digitale in: Göttinger Digitalisierungszentrum, https://it.wikipedia.org//wiki/Matteo_Barbieri.

clima culturale dello Studio formò la mente di giovani intellettuali del calibro di Pietro Giannone[4] (1676-1748) che dedico 20 anni della sua vita alla sua gigantesca opera[5]. Soprattutto va considerato l'impegno del filosofo Giambattista Vico[6] (1668-1744), che oltre al grande contributo delle sue opere, e alla critica al mondo cartesiano, proprio nello Studio di Napoli ottenne la cattedra di Retorica nel 1699.

3. La Matematica nel regno di Napoli agli inizi del 1700

All'inizio del '600 secolo, lo Studio di Napoli considerava la matematica e la fisica come discipline di secondo piano. La Matematica astratta era insegnata principalmente in funzione della medicina e legata all'astrologia per il calcolo dei "giorni critici" dei malati. La fisica addirittura non esisteva come scienza autonoma o sperimentale; era considerata *filosofia naturale* e veniva insegnata in modo puramente teorico, basandosi sui dogmi del sistema aristotelico-tomista.

Si inizia ad usare lo strumento matematico e geometrico per liberare la scienza dai vincoli teologici ed ecclesiastici.

A sua volta la fisica cominciò a fondarsi sul metodo sperimentale e sull'osservazione diretta. Sotto l'antico motto lucreziano *Vestigia lustrat* (*ne segue le tracce*), gli Accademici rifiutarono il principio di autorità aristotelico. la matematica godeva di un qualche prestigio accademico era il *Collegio dei Gesuiti*. La *Compagnia di Gesù* considerava la matematica un "ponte" perfetto tra la fisica del mondo sensibile e la metafisica del mondo

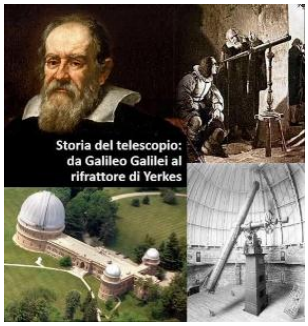
[4] Pietro Giannone (1723-1760). *Istoria Civile del Regno di Napoli, in 40 volumi*. Giannone, il quale per le sue critiche all'Istituzione ecclesiastica fu perseguitato dall'Inquisizione romana e trascorse gli ultimi 12 anni della sua vita in carceri piemontesi.

[5] L'opera di Giannone fu aspramente criticata da Gentile, forse in modo coerente con i tempi e la cultura di Gentile, ma probabilmente con critiche su particolari di secondaria importanza. Cf. Gentile Giovanni (1904), Pietro Giannone, plagiario, e grand'uomo per equivoco, in *La Critica* II, pp.216-251.

[6] Vico nel 1720 pubblica il Diritto universale e nel 1725 vede invece la luce la prima edizione de La scienza nuova, universalmente riconosciuta come la sua opera più importante.

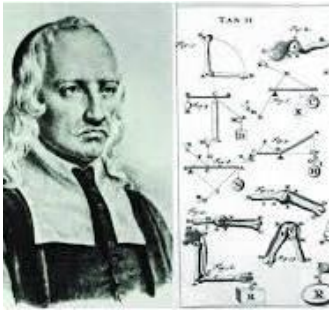
divino. A Napoli, i Gesuiti promossero la matematica non solo come speculazione intellettuale, ma anche per scopi pratici e ingegneristici. Per loro erano valide le applicazioni relative all'architettura militare, alla balistica all'idraulica e alla cartografia.

La vera rivoluzione avvenne a Napoli a partire dagli anni '50 e '60 del Seicento. Nell'ambito della citata *Accademia degli Investiganti*, del matematico Tommaso Cornelio (1614-1684)[7], professore dal 1653, inizia la circolazione clandestina e ufficiale delle opere di Galileo Galilei. La matematica diventa emancipazione ed iniziò a essere considerata come **l'**unico linguaggio oggettivo in grado di descrivere la natura, anche in forza del soggiorno a Napoli del celebre matematico Giovanni Alfonso Borelli (1608- 1679).



Galileo Galilei

Casa del Salvatore



Giovanni Alfonso Borelli

L'unica struttura ove i successori intellettuali e scientifici di Tommaso Cornelio (il medico e filosofo calabrese che introdusse Cartesio, Galilei e l'atomismo gassendiano nel Regno di Napoli) sono le figure di spicco che raccolsero la sua eredità all'interno dell'*Accademia degli Investiganti* e che portarono avanti la battaglia culturale della *scienza nuova* contro l'aristotelismo tradizionale.

I principali continuatori della sua opera si dividono in due generazioni:

a. I co-fondatori, che condivisero il suo agire.

Leonardo di Capua (1617-1695). Medico e filosofo, fu il più fedele alleato di Cornelio e difensore del metodo scientifico sperimentale applicato

[7] Al 1663 risale l'opera principale di Cornelio dal titolo *Progymnasmata physica*, in cui sono esposte le sue teorie matematiche e filosofiche.

alla medicina. Nel 1681 pubblicò il "*Parere"*, sostenendo le idee di chi opponeva la ricerca medica e scientifica opponendosi al sapere della tradizione e ai dogmi della medicina galenica.

Francesco d'Andrea (1625- 1698) di Ravello. Non fu un matematico di professione, ma uno dei più illustri giuristi, filosofi e uomini politici del Seicento italiano. Fu però il principale promotore della nuova scienza e della matematica a Napoli, sostenendo lo studio delle discipline galileiane e cartesiane contro l'oscurantismo dell'epoca, divenendo l'anello di congiunzione tra la rivoluzione scientifica e il rinnovamento civile e giuridico di Napoli. Fu tra i primi ad abbracciare la filosofia cartesiana su proposta di Cornelio.

NOTA. Il contributo di D'Andrea si riassume nei seguenti punti chiave:

1. Sfruttando la sua influenza politica e la vicinanza al Viceré Duca d'Oñate, D'Andrea convinse il governo a reintrodurre la cattedra di matematica all'Università di Napoli.

2. A ricoprire tale cattedra, nel 1653, volle fortemente il filosofo e e si adoperò affinchè fosse il matematico Tommaso Cornelio, suo maestro e amico, a coprirla. Così Cornelio potè introdurre negli ambienti accademici meridionali, tramite il suo insegnamento, le teorie di Galileo e Cartesio.

3. Fu tra i fondatori e membri di spicco della celebre Accademia degli Investiganti, istituto che divenne il fulcro per il rinnovamento culturale napoletano e luogo di dibattito sulla filosofia naturale e sull'atomismo.

4. Svolse un'intensa opera di saggista, difendendo le nuove scoperte scientifiche e il metodo sperimentale, specie nella sua *Apologia in difesa degli atomisti*[8] dagli attacchi dei conservatori e dell'Inquisizione.

Luca Antonio Porzio (1639 –1723) di Positano, fu medico e scienziato. Continuò le ricerche biologico-mediche seguendo le impostazioni iatromeccaniche e atomistiche, tracciate da geniale uomo che fu il Cornelio.

Sebastiano Bartoli (1630–1676) fu uno dei principali protagonisti della rivoluzione scientifica napoletana e accademico degli Investiganti insieme

[8] Su D'Andrea si può approfondire la sua biografia e il suo ruolo nel Dizionario Biografico Treccani o tramite gli studi sul Museo Galileo.

a Tommaso Cornelio e per lui spenderemo qualche riga in più. Il suo nome è indissolubilmente legato alla diffusione dell'helmontismo (la medicina chimica di Jean Baptiste van Helmont) nel Regno di Napoli, durante il secondo Seicento. Bartoli è considerato dalla storiografia moderna come il più convinto e fervido sostenitore della medicina chimica nel panorama meridionale. In netta rottura con l'aristotelismo e il galenismo tradizionale, egli diffuse l'idea che i processi biologici del corpo umano e le malattie non fossero regolati dagli "umori" classici, ma da reazioni e fermenti di natura chimica**.**

NOTA. Nel 1663 Bartoli pubblicò la sua opera fondamentale: *Astronomiae Microcosmicae Systema Novum*, libro che venne considerato il vero e proprio *manifesto scientifico dell'Accademia degli Investiganti.* Il suo lavoro conteneva una durissima critica contro la medicina scolastica (nella sezione *In eversionem scholasticae medicinae*). Il libro era così rivoluzionario e sovversivo per l'epoca, che le autorità tradizionaliste ne ordinarono il sequestro e il rogo pubblico**.**

Oltre alla *iatrochimica*, Bartoli applicò il nuovo metodo sperimentale allo studio del territorio e delle risorse naturali campane. Fu un pioniere dell'idrologia medica attraverso due importanti trattati: Il *Breve ragguaglio de' bagni di Pozzuolo*, incentrato sulle proprietà terapeutiche delle acque termali flegree, La *Thermologia Aragonia*, un'estesa indagine idrologica pubblicata postuma. A livello sperimentale, la tradizione gli attribuisce anche contributi tecnici di rilievo, tra cui una delle prime versioni locali del termometro**.**

b**.** Non da meno dei co-fondatori furono *gli intellettuali formatisi nel clima culturale da lui creato* e che traghettarono il pensiero degli Investiganti verso il neonato illuminismo meridionale. Tra questi:

Giuseppe Valletta (1636- 1714). Studiò dapprima letteratura presso i Gesuiti per poi dedicarsi al diritto, fu infatti filosofo e giurista, raccolse

l'eredità degli Investiganti difendendo i *moderni* e la libertà di ricerca contro i tradizionalisti e l'Inquisizione (specie nel celebre processo[9] degli "ateisti").

Giacinto de Cristoforo (1650 oppure 1664- 1725) Fu tra i primi a introdurre a Napoli il calcolo infinitesimale e le moderne teorie cartesiane. Intrattenne fitte corrispondenze scientifiche con grandi intellettuali europei, si parla di un paio di ponderose opere, oggi disperse, dedicate l'una alle vite degli accademici pontaniani, l'altra ad una storia delle scienze e delle lettere di tutto il mondo. Tra le sue pubblicazioni più importanti si ricorda il trattato geometrico *De constructione aequationum* (1700).

Nicola Caravita (1647-1717) e **Gregorio Caloprese** (1654-1715), erano pensatori giuristi e scienziati che organizzarono e mantennero vivi i salotti scientifici, letterari e filosofici a cavallo tra Seicento e Settecento.

Giambattista Vico (1668 –1744), che cpme ben noto risentì fortemente del clima atomistico e cartesiano introdotto a Napoli dal Cornelio (che definì epicamente *latinissimo* per la sua eccezionale padronanza della lingua latina). L'opera fondamentale di Vico è la *Scienza Nuova*, in cui egli analizza le leggi costanti che regolano lo sviluppo delle civiltà umane.

Pietro Giannone *(1723-1760).* Nella sua *Istoria civile del Regno di Napoli in 40 volumi* celebrò esplicitamente Tommaso Cornelio e Leonardo di Capua come coloro che avevano aperto le menti dei napoletani alla modernità. Giannone per le sue critiche all'Istituzione ecclesiastica fu perseguitato dall'Inquisizione romana e trascorse gli ultimi 12 anni della sua vita in carceri piemontesi.

c.- L'ultima questione è chiederci *chi andò ad occupare la Cattedra di Tommaso Cornelio* (1614-1684). Non vi è dubbio che vista la grande fama

[9] Il processo agli ateisti fu celebrato dall'Inquisizione nel Regno di Napoli tra il 1688 e il 1697. Riguardò un numero limitato di imputati, tra i quali l'avvocato Basilio Giannelli, Filippo Belli, Francesco Paolo Manuzzi e il matematico Giacinto de Cristofaro che furono arrestati e processati dal Sant'Uffizio con l'accusa di eresia, atomismo e ateismo Gli imputati non erano nomi eccellenti, ma personalità di second'ordine e, attraverso il processo, il Papato voleva rivolgere un monito a personalità più eminenti e arginare la proliferazione nel Regno di Napoli delle nuove filosofie e teorie scientifiche di ispirazione atomista e perfino ateista.

e genialità di Cornelio, non poteva che trattarsi di una persona notevole. Già a partire dal 1678, a causa delle precarie condizioni di salute e dell'infermità che colpirono Cornelio negli ultimi anni della sua vita, la persona che andò ad occuparne la cattedra fu l'altrettanto celebre medico Luca Tozzi (1638-1717)**.** Alla morte di Cornelio, avvenuta nel 1684, Tozzi ne ereditò ufficialmente l'attività didattica nello Studio di Napoli. Curiosamente, sul piano dottrinale Tozzi e Cornelio si trovarono su sponde opposte: Tozzi fu infatti il fondatore dell'*Accademia dei Discordanti*, nata in diretta e accesa contrapposizione alla idea atomista dell'*Accademia degli Investiganti* di Cornelio.

La complessità dell'insegnamento tenuto da Cornelio, per circa trent'anni, costituito sia dalla *Matematica* sia dalla *Medicina teoretica*, ebbero a generare, nello Studio di Napoli, due, ben distinte, linee di successione. La *Medicina teoretica* fu occupata da Luca Tozzi (1638-1717), figura di enorme rilievo in modo definivo. Il settore della *Matematica* (dove Cornelio leggeva anche lezioni di *Astronomia*) rimase scoperta per alcuni anni. Finalmente nel 1695 la cattedra venne assegnata ad Agostino Ariani[10] (1672 –1748).

NOTA. Luca Tozzi, nato il 21 novembre 1638 a Frignano (Caserta) ed è morto l'11 marzo 1717 a Napoli. Nel 1659 consegue la laurea in medicina presso lo Studio di Napoli. Nel 1678 sostituisce Cornelio, che è infermo, nelle letture universitarie. Nel 1694 **o**ttiene la titolarità della prestigiosa cattedra di Medicina teorica dell'Ateneo napoletano. Ancora nel 1696 Tozzi si trasferisce a Roma dopo essere stato nominato *Archiatra pontificio* di Papa Innocenzo XII[11], subentrando al celebre scienziato bolognese Marcello

[10] Ariani raccolse l'eredità scientifica di Cornelio introducendo la geometria euclidea, la trigonometria e la meccanica, contribuendo a sdoganare le scienze matematiche agli occhi della diffidente cultura dell'epoca.

[11] Ad Innocenzo XII, al secolo Antonio Pignatelli di Spinazzola**,** Membro di un nobile casato napoletano, succede Clemente XI (1649(1700) 1721) nato Giovanni Francesco Albani di Urbino. La famiglia Albani era una nobile famiglia di origine albanese, mentre la madre Elena apparteneva alla famiglia dei marchesi Mosca di Pesaro, di origini lombarde. Giovanni Francesco si formò presso i Gesuiti. Grazie

Malpighi (1628-1694) sulla cattedra che egli aveva tenuto alla Sapienza. Nel 1700, l'allora Cardinale Giovanni Francesco Albani di Urbino ebbe a consigliare all'allora pontefice Innocenzo XII, la disposizione testamentaria con la quale il re di Spagna Carlo II (1661(1665)1700), il famoso Re bambino, assegnava la successione a Filippo d'Angiò, nipote del Re di Francia 1690 Luigi XIV. Il Re di Spagna Carlo II seguì il consiglio della Santa Sede e Filippo appena diciassettenne, divenne Re di Spagna con il nome di Filippo V(1683(1700)1746), alla morte di Carlo. Dopo la morte di Innocenzo XII, Tozzi rientra a Napoli, dove viene nominato *Protomedico del Regno* sotto il governo spagnolo.

Nel 1732 esiste nello studio di Napoli una sola cattedra di Matematica occupata dal napoletano Agostino Ariani (1672-1748).

NOTA. Ariani ad appena 23 anni, il 30 gennaio 1695 gli fu conferita, come professore interino, la cattedra di matematica all'Università restata vacante da Agostino Passante (1653-1732). Passante apparteneva all'ordine dei Chierici Regolari Poveri della Madre di Dio delle Scuole Pie (Scolopi). Questo ordine religioso fu tra i primi in Europa a promuovere l'insegnamento delle scienze esatte e della matematica nelle proprie scuole, integrando i metodi galileiani all'interno dei propri curricula di studio. Passante viene trasferito a Roma come procuratore generale del suo Ordine presso la Santa Sede. L'incarico che gli spianò la nomina a Vescovo nel 1725. Nel 1706 Ariani entrò a far parte della Regia Camera della Sommaria come procuratore fiscale del patrimonio reale e nel 1715 fu nominato segretario della Real Giunta della Zecca. Nel 1721 affidò la cattedra universitaria ad uno dei suoi discepoli, il matematico Nicola Antonio de Martino (1701-1769). Nicola oltre che professore di matematica fu anche Direttore del Real Corpo degli Ingegneri e Guardia Marina. Nel 1747 fu

---

alla sua competenza e alla sua conoscenza dei meccanismi di governo della Chiesa, fu consigliere di Papa Alessandro VIII (1689-1691) che lo nomina Cardinale nel 1690 ed è ancora Consigliere di Innocenzo XII. Prese parte a due conclavi: quello del 1691e quello del 1700, che lo vide eletto. Fu noto, all'interno della Curia romana, inoltre, come uomo integerrimo e scevro da corruttele e nepotismo.

nominato socio straniero dell'Accademia delle Scienze di Svezia. Il fratello Angelo (1699 - 1744) fu professore alla cattedra fisico-medica, allo Studio di Napoli, mentre l'altro fratello Pietro (1707–1746) occupò la cattedra di Astronomia e Nautica nel 1735. Si trattò di una cattedra creata appositamente per lui nell'ambito della riforma universitaria promossa dal re Carlo di Borbone e dal Cappellano Maggiore Celestino Galiani[12] (1681-1753), considerata la prima cattedra di astronomia in Italia.

Si noti che il Cappellano Maggiore Celestino Galiano[13] (1681-1753) operava fin dal 1732, ai fini dell'istituire una seconda cattedra di Matematica, ma la cosa gli fu negata nei due rimanenti anni del governo austriaco. Sotto il regno di Carlo di Borbone nel 1735, la cosa fu possibile, e sorse la 2° cattedra di Matematica, che fosse dedicata all'Astronomia, cattedra che, una volta ottenuta, venne assegnata per concorso a Pietro di Martino (1707-1746). Purtroppo Pietro morirà nel 1746 a soli 39 anni e la sua cattedra fu occupata da Felice Sabatelli (1710–1786), che fu scienziato di grande valore.

NOTA. Felice Sabatelli (1710–1786) è stato un importante astronomo e matematico italiano, strettamente legato alla storia dei fratelli De Martino, dei quali fu prima allievo e poi successore. La sua figura è fondamentale per lo sviluppo della scienza astronomica e nautica nel Regno di Napoli durante il Settecento. Sabatelli studiò a Napoli sotto la guida di Pietro De Martino a partire dal 1737. Successivamente si trasferì a Bologna per fare pratica astronomica presso la celebre Specola Marsiliana, sotto la direzione di Eustachio Manfredi ed Eustachio Zanotti. Nel 1746, alla prematura morte

[12] Si noti che Celestino Galiani nel 1732 aveva chiesto ad Agostino Ariani le dimissioni, per regolarizzare la posizione di Nicolò Di Martino, che fu regolarizzata con regolare concorso nello stesso anno.

[13] Celestino Galiani, diede un enorme contributo alla cultura italiana. Nato nel 1681 a San Giovanni Rotondo, fu arcivescovo, filosofo e protagonista della riforma degli studi universitari a Napoli. Fu uno di portatori delle idee di Galileo Galilei, Isaac Newton e John Locke e cercò di aprire lo Studio di Napoli alle nuove correnti scientifiche europee. Fu anche mentore del celebre Ferdinando Galiani, uno degli economisti più brillanti dell'Illuminismo italiano.

di Pietro De Martino, Sabatelli ottenne per concorso la *cattedra di Astronomia e Nautica* presso l'Università di Napoli. Insegnò *Istitutiones Astronomicae, et de arte Nauticae* per quarant'anni, fino alla sua morte. Collaborò intensamente con l'altro fratello, il matematico Nicolò De Martino, e con lo scolopio Nicola Maria Carcani (1716-1764), all'interno di un circolo intellettuale scientifico napoletano. Sabatelli fu tra i primi a sollecitare con forza la costruzione di un moderno osservatorio astronomico pubblico a Napoli. Propose la fondazione di una specola prima presso il presidio militare di Pizzofalcone (che sarebbe stato il terzo osservatorio in Italia) e in seguito presso l'ex Collegio dei Gesuiti, sebbene i suoi sforzi non trovarono immediata realizzazione pratica, per mancanza di fondi statali. Per la ricerca fornì a scienziati europei dati precisi sulle eclissi solari (come quella del 25 luglio 1748) e, insieme a Carcani, perfezionò la misurazione dell'esatta latitudine di Napoli. Nel 1749 progettò inoltre una celebre meridiana per la biblioteca del principe Ferdinando Spinelli di Tarsia.

NOTA. Nicola Maria Carcani (1716-1764) nato a Giffoni Valle Piana, appartenne all'Ordine degli Scolopi dal 1731. Completò gli studi a Roma. Insegnò lettere, filosofia e matematica nel Collegio di San Carlo alle Mortelle a Napoli, del quale fu Rettore dal 1752. Creò una interessante specola astronomica privata. Suo fratello Pasquale fu il braccio destro di Bernardo Tanucci. Collaborò con Felice Sabatelli per misurare la latitudine di Napoli (fissata a 40° 50' 15") e, il 6 giugno 1761, osservò il transito di Venere sul Sole seguendo le istruzioni dell'astronomo parigino Joseph-Nicolas de L'Isle (1620-1688).

Attorno al 1761 fu istituita una terza cattedra di Matematica precisamente di Aritmetica ed Algebra. Per i primi tempi fu ricoperta dal monaco benedettino ldefonso Ortiz-Cortez (1725-1791), vescovo di Nottola, poi fu messa a concorso e nel 1768 ne fu titolare Giuseppe Marzucco (1713-1800). Nel 1772, dopo la morte di Nicolò Di Martino (1701-1768), il Prof. Marzucco optò per la Cattedra di de Martino libera. Il suo posto fu preso da Nicola Cavallo (1724-1802) dell'ordine degli Scolopi.

Nel 1777 lo studio di Napoli, oramai Università, viene trasferito nel monumentale Collegio Massimo dei Gesuiti (noto come il Salvatore), dopo l'espulsione dell'ordine dal regno. Entra in vigore una nuova e più dettagliata riforma, dovuta a Ferdinando IV Borbone (1751(1759)1825) e ai suoi collaboratori, mediante la quale si inizia a delineare la natura e la struttura dei singoli insegnamenti nelle diverse Facoltà. Nascono le Facoltà di Scienze naturali, la Facoltà di Matematica formata dalle cattedre di *Astronomia* (con Sabatelli), *Matematica analitica* (detta "*Algebra e Dottrina delle Curve*", con Giuseppe Marzucco (1713-1800)), *Matematica sintetica* (con Marcello Cecere (1720?-1800?)) *Geografia e Nautica* (con l'Abate Ludovico Marrano[14] (1740?- 1801?)), *Meccanica* (con il Prof. Nicola Cavallo (1724-1802)), *Architettura Civile e Geometria pratica* (con il Canonico Giuseppe Torallo[15] (1740? – 1801?)). Nascono anche due cattedre di Fisica, la nuova viene occupata dal Prof. Mario Lama (1710-1777), l'altra che esisteva dal 1740, fu occupata prima dal prof. Giuseppe Orlando (?1701-?1758), poi dal 1758 da Serafino Filangeri (1713-1782) che divenne Vescovo di Matera, dopo di che la cattedra rimase senza titolare fino al 1777. Nell'occasione della morte di Mario Lama, la sua cattedra fu abolita e il compito didattico fu affidato alla cattedra di Fisica Sperimentale, che dal 1777 fu occupata temporaneamente dal giurista Saverio Mattei (1742-1795), al quale nel 1779 subentra l'importante fisico Giuseppe Saverio Poli (1746-1825) di rientro da esperienze in Inghilterra. Poli per 12 anni da un notevole impulso all'attività. Nel 1791 Poli va ad incarichi di

[14] Marrano fu l'autore dei fortunati *Elementi di matematica composti per uso della studiosa gioventù*, in più volumi per l'insegnamento, ristampata più volte. Scrisse testi di aritmetica, geometria, fisica e fu studioso di culture orientali.

[15] Dopo il 1768, ebbe anche la cattedra di Storia. Divenne celebre per una serie di lettere del 1764, confluite nelle famose *Lettere Accademiche con il grande economista l'Abate Antonio Genovesi, con discussioni sulla "felicità"*. Genovesi sosteneva l'importanza di estirpare i vizi *(scavare profonde prigioni ai vizi) e Torallo* li difendeva come forme di *ragioni raffinate.* Le date di nascita e morte di Torallo sono presunte.

maggiore importanza e lo sostituisce Gian Gaetano del Muscio (1746- 1807) Arcivescovo di Manfredonia.

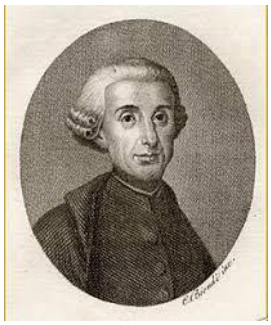
Nicolò di Martino

Serafino Filangeri

Saverio Poli

Ludovico Marrano

NOTA. Marcello Cecere[16] (1720?-1800?) è stato un importante matematico e accademico italiano, attivo nella Napoli del Settecento. Originario di Bonea (Benevento), è celebre per essere stato un maestro di spicco presso le Scuole del Salvatore, dove ha insegnato *Geometria Elementare* e *Matematica Sintetica* presso il Liceo del Salvatore a Napoli nella seconda metà del 1700. Della *Matematica sintetica* può essere considerato uno dei fondatori. Il suo contributo fu fondamentale nel formare la successiva generazione di scienziati meridionali; tra i suoi allievi più illustri si annovera Nicola Fiorentino e Nicolò Fergola (1753-1824) che sarà il fondatore della *Scuola sintetica* napoletana nel 1770. La sua figura si inserisce nel vivace fermento scientifico napoletano dell'epoca, affiancando figure di rilievo come Vito Caravelli (1724- 1800).


Caravelli (1724)

Fergola (1753)

Flauti (1782)

Battaglini (1826)

[16] Le date di nascita e morte di Marcello Cecere sono presunte.

NOTA. La *geometria sintetica* del Cecere fu poi ripresa da Vincenzo Flauti (1782-1863) allievo dello stesso Fergola, il quale nel 1801, assieme a Felice Giannattasio (1756–1849) assunse la direzione della scuola di Fergola. Nel 1803 Flauti ottenne la cattedra di Sintesi all'Università di Napoli, per assumere quella di Analisi nel 1806, Analisi dei finiti e Geometria descrittiva nel 1812 e infine succedere a Fergola nella cattedra di Analisi sublime (1814). Fu estromesso contro il suo volere dopo la nascita del Regno d'Italia nel 1860, quando Garibaldi quale prodittatore nominò, come professore Ordinario, Giuseppe Battaglini (1826-1894), sostenitore della *Geometria Analitica*, sempre fortemente osteggiato dal Flauti.

NOTA. Felice Giannattasio (1756–1849) è stato un presbitero, filosofo e matematico italiano di spicco nella Napoli illuministica. Docente di astronomia e rettore dell'Università di Napoli, ha contribuito in modo determinante alla scuola geometrica del tempo, pubblicando opere di riferimento come gli *Elementi della Geometria sublime* e le *Instituzioni delle sezioni coniche*.

Le Università europee iniziano a prendere in considerazione nuovi sistemi pedagogici, uno per tutti è la Ratio Studiorum nata nel 1599, per la riforma degli studi dei Collegi dei Gesuiti. Fu promulgata da *Claudio Acquaviva d'Aragona, nato nel Ducato di* Atri (Abruzzo Teramano) nel 1543 e morto a Roma nel 1615. Claudio Acquaviva è stato un gesuita italiano, quinto Preposito Generale (il cosiddetto Papa nero) dal 1581 alla morte.

NOTA. La famiglia Acquaviva, di origini nell'Abruzzo Teramano, è una delle sette famiglie che reggono la città e il Regno di Napoli. Che sono:

Sanseverino: Titolari storici del ruolo di Grandi Conestabili del Regno, dominavano immensi feudi tra la Calabria e la Campania.

Acquaviva: Potentissima famiglia legata soprattutto ai territori dell'Abruzzo e della Puglia (Duchi di Atri).

Ruffo: Divisa nei rami di Scilla e Bagnara, è una delle casate più antiche ed è rimasta influente fino all'epoca contemporanea.

Del Balzo: Di origine provenzale, giunsero al seguito degli Angioini e si imparentarono con le famiglie reali d'Europa.

D'Aquino: Celebre stirpe di origine longobarda legata alla terra di San Germano, che annovera tra i suoi membri San Tommaso d'Aquino.

Piccolomini: Famiglia di origine senese, ottenne feudi imponenti nel regno (come il Ducato di Amalfi) grazie al Papa Pio II.

Celano (o **Marzano** / **De Molise** a seconda delle epoche): Conti storici della Marsica, il cui titolo passò poi per via matrimoniale ad altre casate del regno.

La Ratio Studiorum è un *sistema pedagogico* che ha profondamente rivoluzionato il sistema di valutazione universitario e collegiale. Il sistema introduce per la prima volta, in modo sistematico, il concetto di esami di profitto regolari, pubblici e progressivi**,** passando da una valutazione soggettiva a un sistema per certi versi fortemente oggettivo ed anche meritocratico.

La riforma ha influenzato la creazione degli esami di profitto nelle università e nel sistema educativo moderno in diversi modi specifici. Prima della *Ratio*, l'avanzamento accademico era spesso fluido. I gesuiti hanno introdotto l'obbligo di superare esami parziali su parti specifiche dell'impianto culturale globale indicativo della formazione, un certo numero dei quali esami costituiscono il complesso delle discipline che la classe deve seguire in un anno. Superate tali prove si può passare al livello o alla classe successiva, rendendo la progressione subordinata ad un controllato reale apprendimento.

Accanto alle tradizionali dispute e interrogazioni orali, il metodo ha implementato le prove scritte (le *compositiones*), permettendo di valutare in modo più preciso e oggettivo le competenze grammaticali e retoriche di ciascun allievo. La riforma prevedeva un sistema di "ripetizioni" (giornaliere, settimanali e mensili) e dispute continue, per monitorare la crescita dell'allievo stesso. La Ratio Studiorum ha dato vita alla moderna concezione di verifica continua del profitto, non solo limitata a un singolo esame finale. I risultati delle verifiche venivano utilizzati per stilare

classifiche, assegnare ruoli di prestigio all'interno della classe (come i *decurioni*, cioè studenti che aiutavano gli altri) e stimolare la competizione sana tra gli studenti.

Tuttavia, le Università non accettarono a pieno la Ratio Studiorum ma escogitarono sistemi pedagogici simili.

Siamo oramai alle soglie del Novecento.

Con l'Unità d'Italia, e l'estensione della Legge Casati (1861) anche nel Sud, l'Università perde ogni residua autonomia e viene inserita nel sistema scolastico nazionale centralizzato. Tra la fine dell'Ottocento e l'inizio del Novecento viene costruito l'attuale Palazzo della Sede Centrale in Corso Umberto I.

D'Ovidio (1843)

Caccioppoli (1904)

Majorana (1906)

La nostra storia continua… parleremo in futuro del molisano, formatosi a Napoli, Enrico D'Ovidio (1843-1933), che divenne Rettore dell'Università di Torino e promosse la Geometria algebrica con i suoi Corrado Segre e Guido Castelnuovo, parleremo del grande Renato Cacioppoli (1904-1959), e del mistero della sparizione del fisico siciliano Ettore Majorana (1906-?), ma anche di tanti altri!

Andate su *www.afsu.it/opera* aperta, e collaborate con noi.

Bibliografia

F. Amodeo (1924) *Vita matematica napoletana*, Tip. Acc. Pontaniana, Napoli

G.P. Brizzi, P. Del Negro Piero, A. Romano (a cura di) (1997-2007, 3 volumi). *Storia delle Università in Italia*, Sicania Ed., Messina.

L. Carbone, G. Cardone, J. Casanovas, S. Mancuso, F. Palladino, I. Valente (2018) *Il Cortile delle Statue*, FedOA - Federico II University Press.

A. Castagnaro (2019) *Passeggiando per la Federico II*, FedOA - Federico II University Press.

M.G. Castellano Lanzara (1956) *La casa del Salvatore in Napoli,* in AA.VV. Miscellanea di scritti vari in memoria di Alfonso Gallo*,* Firenze, Olschki, pp. 239-247.

P. Coppola, M.R. Sant'Angelo (2020) *Federico II apre la Corte* - Università degli Studi di Napoli Federico II.

H. De Ridder Symoens (a cura di) (1992) *A History of the University in Europe* (Vol. I). Universities in the Middle Ages*,* Cambridge University Press.

H. De Ridder Symoens (a cura di) (1996) *A History of the University in Europe* (Vol. II). Universities in Early Modern Europe 1500-1800*, 1996).* Cambridge University Press (I due volumi sono considerati le opere di riferimento sulla storia dell'istituzione universitaria).

L. De Rosa (2024) *Breve storia di una storia lunga 600 anni: il Collegio Massimo dei Gesuiti di Napoli*, in Mezzocannone 8: Storia di un luogo. pp. 29-45. Atti del convegno, 21. 10. 2023, Napoli, Fedoa Press, pp. 29-45.

F. Eugeni, E. Ruscio (2004) *Carlo Forti, allievo di Nicola Fergola, ingegnere sul campo*, Ed. Edilgraphital, Teramo. (con appendice *Linea di una ricerca storico indiziaria in ordine alla possibile militanza di Melchiorre Delfico nella Massoneria di fine settecento*).

M. Errichetti (1976) *L'antico Collegio massimo dei Gesuiti a Napoli*, in "*Campania sacra. Studi e documenti" (*pp. 170-264).

C.H. Haskins (1998) *La rinascita del XII secolo,* Il Mulino, Bologna (1° ed 1927).

J. Verger (1983) *Le università nel Medioevo*, Il Mulino, Bologna.

A. Pinto (2005) *Nell'antico Collegio Massimo dei Gesuiti di Napoli. Il museo di Fisica dell'Università Federico II*, in "*Societas. Rivista dei Gesuiti dell'Italia meridionale"*, n. 1-2, pp. 27-47, pp. 34-36; 43-45.

G. Pugliano (2012) *Le accademie napoletane di via Mezzocannone: i restauri dell'antica sede e la rinascita nel secondo dopoguerra*, Napoli, Giannini (pp. 2-126).

M. Schipa (1924) *La fondazione dell'Università di Napoli e l'Italia del tempo*, (conferenza tenuta alla "Dante Alighieri" di Napoli il 27.04.1924).

Spazi lineari, piani affini e piani proiettivi finiti

Franco Fernicola, Volpe Benedetta
franco.fernicola@iisassteas.edu.it
benedetta.volpe@iisassteas.edu.it

Sunto- *Negli anni 50' il noto matematico italiano Beniamino Segre crea le condizioni per la nascita della Geometria Combinatoria; alla base esiste l'idea di studiare le proprietà geometriche da un punto di vista puramente combinatorio svincolandosi in tal modo dall'algebra. In Italia l'autore che meglio interpretò le idee di Segre fu il suo allievo Giuseppe Tallini che ben presto, non solo prese in eredità tale idee, le ampliò e divenne un punto di riferimento per molti ricercatori a livello mondiale. La nozione di spazio lineare, come accade in tanti settori della matematica, non può essere riconducibile ad un singolo studioso ma la sua precisa formalizzazione moderna si deve al matematico belga Francis Buekenhout, che nel 1969 ne standardizzò il nome e i tre assiomi. In questo breve articolo metteremo in evidenza non solo la nozione di spazio lineare finito, parleremo dei piani affini finiti di ordine n, dei piani proiettivi finiti di ordine n e la teoria sviluppata riguardante l'indagine non proprio agevole sull'esistenza di queste strutture fissato un intero* $n \geq 2$.

Parole chiave: spazio lineare; piano affine; piano proiettino

Abstract- *In the 1950s, the well-known Italian mathematician Beniamino Segre created the conditions for the birth of Combinatorial Geometry. At its core lies the idea of studying geometric properties from a purely combinatorial perspective, thus breaking free from algebra. In Italy, the author who best interpreted Segre's ideas was his student Giuseppe Tallini, who soon not only inherited and expanded upon those ideas, but also became a point of reference for many researchers worldwide. The notion of linear space, as happens in many fields of mathematics, cannot be attributed to a single researcher but its precise modern formalization is due to the Belgian mathematician Francis Buekenhout, who in 1969 standardized its name and its three axioms. In this short article, we will highlight not only the notion of finite linear spaces, but we will also discuss finite affine planes of order n, finite projective planes of order n, and the theory developed regarding the far-from-easy investigation into the existence of these structures for a given integer* $n \geq 2$.

Keywords: linear space; affine plane; projective plane

1.1 SPAZI LINEARI

1.1 Definizione. *Uno* spazio lineare *è una coppia (**P**,**L**), dove **P** è un insieme i cui elementi sono detti* punti *e **L** è una famiglia di parti di **P** i cui elementi si dicono* rette*, che soddisfa i seguenti assiomi:*

*(**L**$_1$) Due punti appartengono ad un'unica retta.*

*(**L**$_2$) Ogni retta ha almeno due punti.*

*(**L**$_3$) Esistono almeno tre punti non allineati (cioè non contenuti in una stessa retta).*

Osserviamo che l'assioma (L_3) è di non degenerazione in quanto gli spazi lineari che non lo soddisfano si riducono ad un'unica retta. Talvolta, riferendoci all'assioma (L_3), diremo *esiste un triangolo effettivo.* Esso può essere sostituito dall'assioma

(**L**$_3'$) *Esistono almeno due rette.*

Se (**P**,**L**) è uno spazio lineare, per ogni punto P∈**P** con F_P indichiamo il *fascio di rette per p*, ossia l'insieme delle rette passanti per P. Uno spazio lineare (**P**,**L**) si dice *finito* se la cardinalità di **P** è finita, in tal caso anche **L** ed ogni elemento di **L** hanno cardinalità finita, infatti basta osservare che **L** è una famiglia di parti di un insieme finito e quindi la sua cardinalità è finita, allo stesso modo ogni retta ha cardinalità finita perché sottoinsieme di un insieme finito.

Se (**P**,**L**) è uno spazio lineare finito e L è una retta di **L**, con [L] indichiamo la *lunghezza* di L, ossia la cardinalità di L. Per ogni punto P∈**P** si definisce *grado* di P, si indica con [P], la cardinalità di F_P.

Se P è un punto che non appartiene alla retta L, con □(P,L) indichiamo il numero delle rette che passano per P e che non hanno punti in comune con L. Osserviamo che (P,L)=[P]-[L] (conseguenza dell'assioma (L_1)).

Ponendo |**P**|=**v** e |**L**|=**b**, gli interi **v**, **b**, [L] e [P] al variare di L∈**L** e di P∈**P** si dicono *parametri* di (**P**,**L**). In questo e nei prossimi capitoli quando si parlerà di spazi lineari (**P**,**L**) intenderemo che la cardinalità di **P** sia finita.

1.2 ESEMPI DI SPAZI LINEARI

I.2.1 Esempio. Lo spazio lineare su **v**≥3 punti in cui ogni retta ha solamente due punti prende il nome di *grafo completo su* **v** *punti* e si denota con $\mathbf{K}_v$. Osserviamo che in $\mathbf{K}_v$ il numero delle rette è $\binom{v}{2} = \frac{1}{2}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{v}-1)$ e $\mathbf{K}_v$ è l'unico spazio lineare su **v** punti con il massimo numero di rette. Infatti, in uno spazio lineare arbitrario è $b \leq \frac{1}{2}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{v}-1)$ e l'uguale si ha se e solo se ogni retta ha due soli punti, e quindi lo spazio lineare è $\mathbf{K}_v$.

Nelle fig.I.2.1 (a) e fig.I.2.1 (b) è rappresentato $\mathbf{K}_v$, rispettivamente nel caso in cui **v**=5 e **v**=6.

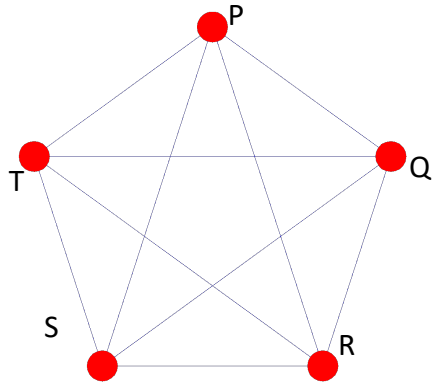


fig.I.2.1(a) K_5

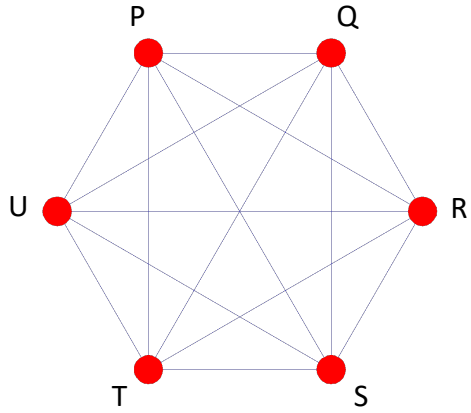


fig.I.2.1(b) K_6

I.2.2 Esempio. Lo spazio lineare su **v**≥3 punti in cui una retta ha lunghezza **v**-1 e tutte le altre hanno lunghezza 2 prende il nome di *near-pencil* o *quasi-fascio*. Osserviamo che il near-pencil è l'unico spazio lineare su **v** punti che ha rette di lunghezza **v**-1. Infatti, in uno spazio lineare arbitrario se L è una retta, risulta [L]≤**v**-1 e l'uguale si ha se e solo se lo spazio lineare è un near-pencil. Nella fig.I.2.2(a) è rappresentato il near-pencil su **v** punti con **v** =6.

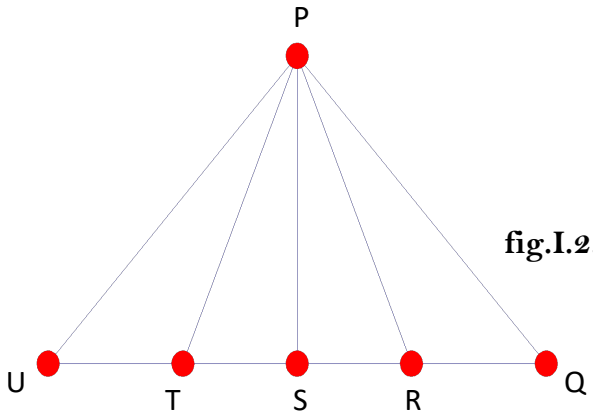


fig.I.2.2(a) Near-pencil

I.2.3 Esempio. Sia $(k_1,k_2,\ldots\ldots,k_s)$ una s-pla di interi con $3\leq k_1\leq k_2\leq\ldots\leq k_s$. Si dice $(k_1,k_2,\ldots,k_s)$–*stella* lo spazio lineare con le seguenti proprietà:

(**i**) Esiste un punto P il cui grado è s e $\forall i\in\{1,2,\ldots,s\}$ $\exists!$ retta di lunghezza k_i.

(**ii**) Tutte le rette che non contengono P hanno lunghezza 2.

Se s=2 una (k_1,k_2)-*stella* è detta anche una (k_1,k_2)-*croce*. Nella fig.I.2.3(a) e fig.I.2.3(b) è raffigurata rispettivamente la (3,3)-croce e la (3,4)-croce.

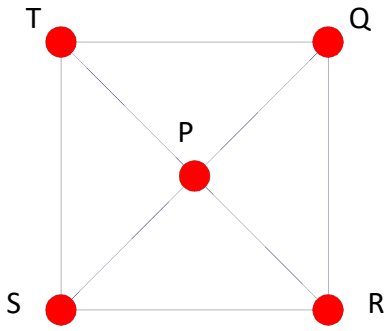


fig.I.2.3(a) (3,3)-croce

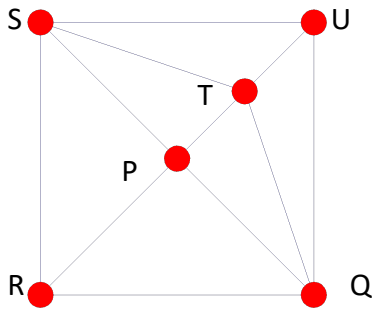


fig.I.2.3(b) (3,4)-croce

1.3 PIANI AFFINI

I.3.1 Definizione. *Uno spazio lineare (P,L) si dice un* piano affine *se verifica il seguente assioma:*

(A) Se L è una retta e P è un punto che non appartiene a L, esiste un'unica retta $L'\in F_P$ *tale che* $L\cap L'=\emptyset$.

Osserviamo che tale condizione è equivalente ad affermare che □(P,L)=1, ∀L∈L e ∀P∈P-L.

I.3.2 Esempio. Il piano euclideo bidimensionale è un esempio di piano affine.

I.3.3 Esempio. Sia P=$\{A, B, C, D\}$ e L=$\{\{A, B\}, \{A, C\}\{A, D\}\{B, D\}\{B, C\}\{C, D\}\}$. Si verifica agevolmente che la coppia (P,L) è un piano affine, esso prende il nome di *tetraedro.* In fig.I.3.3(a) è data una interpretazione grafica di tale spazio lineare.

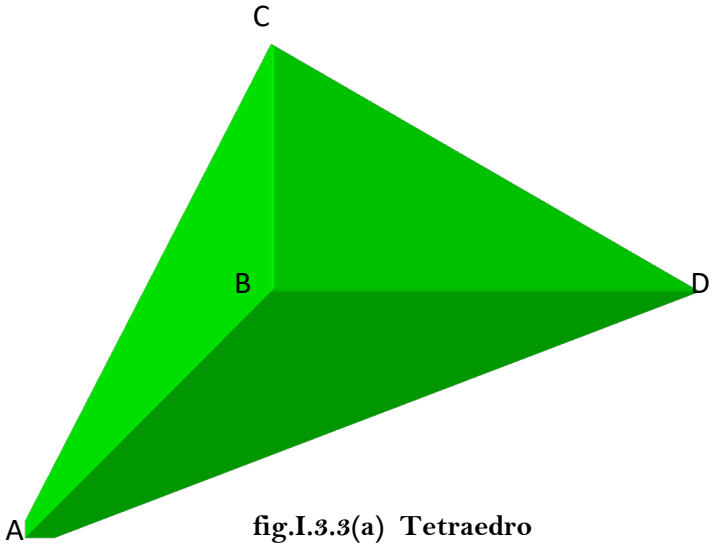


fig.I.3.3(a) Tetraedro

Osserviamo che l'interpretazione grafica è solo questione di gusto ed è molto soggettiva, quello che sappiamo è che Ponendo |P|=4 e |L|=6, [L]=2 e [P]=3 al variare di L∈L e di P∈P.

I.3.4 Proposizione. *Sia (P,L) uno spazio lineare con |P|=v e L|=b. Le condizioni che seguono sono tutte equivalenti:*

(i) *(P,L) è un piano affine.*

(ii) *∃n≥2 tale che: [L]=n ∀L∈L e [P]=n+1 ∀P∈P.*

(iii) *∃n≥2 tale che: [L]=n ∀L∈L e $v=n^2$.*

(iv) *∃n≥2 tale che: [L]=n ∀L∈L e $b=n^2+n$.*

Dalla Proposizione I.3.4 segue in particolare che in un piano affine (P,L) tutte le rette hanno la stessa cardinalità n≥2. L'intero n prende il nome di *ordine* del piano affine (P,L).

1.4 PIANI PROIETTIVI

Ora possiamo introdurre un'altra classe notevole di spazi lineari: i *piani proiettivi*, come proveremo alla fine del capitolo tali strutture geometriche sono strettamente collegate con i piani affini.

I.4.1 Definizione. *Uno spazio lineare (*P,L*) si dice* piano proiettivo *se verifica le seguenti condizioni:*

(P_1) *Due rette distinte hanno un solo punto in comune.*

(P_2) *Esistono quattro punti a tre a tre non allineati.*

La condizione (P_2), talvolta, si esprime più sinteticamente affermando che esiste un *quadrangolo effettivo*.

I.4.2 Esempio. Lo spazio lineare (P,L) così definito: P={A,B,C,D,E,F,G}, L={{A,B,C},{A,E,F},{A,D,G},{C,D,E},{B,E,G},{C,F,G},{B,D,F}} è un piano proiettivo, esso è detto *piano di Fano.* Nella fig.I.4.2(a) è data una rappresentazione grafica del piano di Fano.

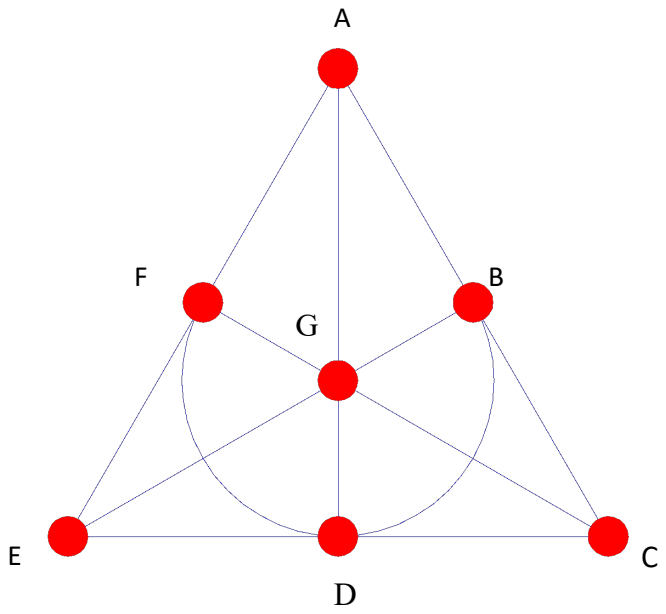


fig.I.4.2(a) Piano di Fano

I.4.3 Proposizione. *Sia (P,L) uno spazio lineare con |P|=v e |L|=b. Le condizioni che seguono sono tutte equivalenti.*

(i) (P,L) è un piano proiettivo.

(ii) $\exists n \geq 2$ *tale che:* $[L]=n+1 \ \forall L \in L$ *e* $[P]=n+1 \ \forall p \in P$.

(iii) $\exists n \geq 2$ *tale che:* $[L]=n+1 \ \forall L \in L$ *e* $v=n^2+n+1$.

(iv) $\exists n \geq 2$ *tale che:* $[L]=n+1 \ \forall L \in L$ *e* $b=n^2+n+1$.

Dalla Proposizione I.4.8 segue che in un piano proiettivo (P,L) tutte le rette hanno la stessa cardinalità n+1, l'intero n=[L]-1 ∀L∈L si dice *ordine* del piano proiettivo.

A questo punto è naturale chiedersi quali relazioni intercorrono tra piani affini e piani proiettivi, i risultati che esporremo dimostrano che l'esistenza degli uni implica l'esistenza degli altri e viceversa.

I.4.4 Definizione. *Se (P,L) è uno spazio lineare, diremo* classe di parallelismo *un insieme di rette R⊆L che ha la seguente proprietà:*

(P) $\forall P \in P$ *esiste un'unica retta* $L \in R$ *tale che* $P \in L$.

I.4.5 Esempio. Sia (P,L) lo spazio lineare definito nell'Esempio I.3.3, vale a dire il tetraedro. L'insieme R={{a,d},{b,c}} è una classe di parallelismo.

I.4.6 Definizione. *Se (P,L) è uno spazio lineare, un* parallelismo *in (P,L) è una famiglia F di classi di parallelismo, tale che ogni retta di L è contenuta in un'unica classe di F. In modo equivalente possiamo affermare che un parallelismo è una partizione delle rette di (P,L) in classi di parallelismo.*

I.4.7 Esempio. Sempre facendo riferimento allo spazio lineare dell'Esempio I.3.3, la famiglia

F={{{a,b},{d,c}},{{a,c},{b,d}},{{a,d},{b,c}}} è un parallelismo.

I.4.8 Definizione. *Sia (P,L) uno spazio lineare e sia R una classe di parallelismo. Due rette L e* L' *di L si dicono* parallele *se appartengono alla stessa classe di parallelismo R.*

I.4.9 Proposizione. *Se (P,L) è uno spazio lineare dotato di una classe di parallelismo R e* ∞_R *è un simbolo, la struttura geometrica* (P^*,L^*) *così definita:*

$P^*=P\cup\{\infty_R\}$, $L^*=\{L\in L / L\notin R\}\cup\{L\cup\{\infty_R\}$ *se* $L\in R\}$ *è uno spazio lineare e dicesi* ampliamento con un punto all'infinito *di (P,L).*

Notiamo che se lo spazio lineare ha più classi di parallelismo, il ragionamento fatto nella Proposizione I.4.14 può essere generalizzato. Infatti si prova la seguente:

I.4.10 Proposizione. *Sia (P,L) uno spazio lineare. Siano* $R_1,R_2,\ldots,R_k$ $k\geq 2$ *classi di parallelismo e* $^{\infty}{}_{R_1}, {}^{\infty}{}_{R_2}, \ldots, {}^{\infty}{}_{R_k}$ *k simboli. La coppia* (P^*,L^*) *così definita:*

$P^*= P\cup\{{}^{\infty}{}_{R_1}, {}^{\infty}{}_{R_2}, \ldots, {}^{\infty}{}_{R_k}\}$,

$L^*=\{L\in L$ *se* $L\notin R_i\ \forall i\}\cup\{L\cup\{{}^{\infty}{}_{R_i}\}$ *se* $L\in R_i\ \forall i\}\cup\{L_\infty\}$, *avendo posto* $L_\infty=\{{}^{\infty}{}_{R_1}, {}^{\infty}{}_{R_2}, \ldots, {}^{\infty}{}_{R_k}\}$ *è uno spazio lineare e dicesi* ampliamento con una retta all'infinito *di (P,L).*

I.4.11 Osservazione. Se (P,L) è uno spazio lineare e X è un sottoinsieme di P tale che P-X contiene un triangolo effettivo, la struttura geometrica $(P^/,L^/)$ così definita:

$P^/$= P-X, $L^/=\{L-L\cap X / L\in L$ e $|L-L\cap X|\geq 2\}$ è uno spazio lineare che prende il nome di *complemento* di X in (P,L). Uno spazio lineare $(P^{//},L^{//})$ che si ottiene come complemento di un punto (due punti) da uno spazio lineare (P,L) è detto spazio lineare (P,L) *bucato* (*doppiamente bucato*).

I.4.12 Lemma. *Sia (P,L) un piano affine di ordine n e in esso consideriamo la seguente relazione:* $L\ \mathfrak{R}\ L^/ \Leftrightarrow L=L^/$ *oppure* $L\cap L^/=\emptyset$. $\mathfrak{R}$ *è una relazione di equivalenza e l'insieme quoziente* $L/_{\mathfrak{R}}$ *è costituito da n+1 classi di equivalenza* $R_1, R_2, \ldots, R_{n+1}$, *ciascuna contenente n rette.*

I.4.13 Osservazione. Le classi $R_1,R_2\ldots,R_{n+1}$ della Proposizione precedente sono n+1 classi di parallelismo, esse costituiscono un parallelismo del piano affine (P,L).

Da quanto esposto finora si deduce facilmente il seguente:

I.4.14 Teorema. *Se (P,L) è un piano affine di ordine n, l'ampliamento di (P,L) con la retta all'infinito formata dalle n+1 classi di parallelismo $R_1,R_2\ldots,R_{n+1}$ è un piano proiettivo di ordine n. Viceversa se (P,L) è un piano proiettivo di ordine n e L è una retta di L, il complemento di L in (P,L) è un piano affine di di ordine n.*

A conclusione di questa sezione enunciamo un importante teorema la cui dimostrazione è dovuta ai matematici Nicolaas Govert de Bruijn e Paul Erdős nel 1948:

I.4.16 Teorema. (TEOREMA FONDAMENTALE) *Se (P,L) è uno spazio lineare finito con $|P|=v$ e $|L|=b$, allora è $b\geq v$. L'uguaglianza è vera se e solo se lo spazio lineare è un piano proiettivo finito o un near-pencil.*

1.5 ESISTENZA DEI PIANI AFFINI

Una questione che nello studio della geometria combinatoria riveste una importanza centrale e in molti casi di non facile soluzione è la seguente questione:

(E) Assegnato un intero $n\geq 2$, esiste un piano proiettivo o affine di ordine n ?

In forza del Corollario I.4.20 ha senso indagare sull'esistenza di una sola delle due strutture geometriche. Di volta in volta si indagherà sull'esistenza dell'una o dell'altra struttura. Osserviamo che se n è potenza di un numero primo p e cioè $n=p^h$ con $h\geq 1$, sappiamo che esiste un campo finito di ordine n, esiste anche un procedimento algebrico che permette di costruire un piano proiettivo di ordine n a partire da questo campo finito K di ordine n. Il piano

proiettivo (P,L) che si costruisce si indica con PG(2,n). In tal modo è assicurata l'esistenza di infiniti interi che possono essere ordini di un piano proiettivo finito. I possibili ordini minori di 20 sono: 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 13, 16, 17, 19.

Intorno al 1782 il matematico svizzero L. Eulero (1707-1783) pose un problema che è strettamente connesso con l'esistenza di un piano affine, ed è il seguente:

Immaginiamo di avere 36 ufficiali appartenenti a 6 reparti diversi, ogni reparto sia rappresentato da 6 ufficiali di grado distinto. È possibile mandare in parata i 36 ufficiali in fila per 6, in modo tale che in ogni riga e colonna compaia un ufficiale di grado diverso per ogni reparto?

Non essendo semplice dare una risposta per tentativi a tale problema, conosciuto come il "problema dei 36 ufficiali",[1] si può dare una risposta introducendo opportuni oggetti matematici: i *quadrati latini*.

I.5.1 Definizione. *Sia X={1,2,....,n} un insieme di n simboli con n≥2. Un* quadrato latino *di ordine n su X è una matrice di ordine n su X, tale che ogni linea (riga o colonna) è una permutazione di* S_n.

I.5.2 Esempio. Se X={1, 2, 3}, le seguenti matrici:

$$A_1=\begin{pmatrix}3&2&1\\2&1&3\\1&3&2\end{pmatrix},\qquad A_2=\begin{pmatrix}2&1&3\\1&3&2\\3&2&1\end{pmatrix},\qquad A_3=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\\3&1&2\end{pmatrix}$$

sono quadrati latini di ordine 3.

Se X={1, 2, 3, 4}, le seguenti matrici:

$$B_1=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\\3&4&1&2\\2&1&4&3\end{pmatrix},\quad B_2=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\\4&3&2&1\\3&4&1&2\end{pmatrix},\quad B_3=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\\2&1&4&3\\4&3&2&1\end{pmatrix}$$

sono quadrati latini di ordine 4.

[1] Euler L., *Le probleme des 36 officiers* Rend. Soc. Sc. Flessing, vol.IX, 1892.

I.5.3 Definizione. *Siano $A=(a_{ij})$ e $B=(b_{ij})$ due quadrati latini. Essi sono detti* ortogonali *se è verificata la seguente condizione:*

(I.5.3$_1$) $\forall(h,k)\in XxX \ \exists!(i,j)$ *tale che* $a_{ij}=h$ *e* $b_{ij}=k$.

In modo espressivo, ma impreciso, possiamo affermare che due quadrati latini sono ortogonali se le coppie di simboli determinate dalla sovrapposizione delle matrici sono tutte distinte (sono in numero di n^2).

I quadrati latini B_1, B_2 e B_3 dell'Esempio I.5.2 sono a due a due ortogonali, mentre A_1, A_2 e A_3 sono a due a due non ortogonali.

La prossima Proposizione da una limitazione del numero di quadrati latini a due a due ortogonali.

I.5.4 Proposizione. *Per ogni intero $n\geq 2$, esistono al più $n-1$ quadrati latini a due a due ortogonali.*

La Proposizione precedente motiva la seguente:

I.5.5. Definizione. *Un sistema di t quadrati latini di ordine n a due a due ortogonali si dice* completo *se $t=n-1$.*

Nell'Esempio I.5.2 i quadrati latini B_1, B_2 e B_3 costituiscono un sistema completo di ordine 4.

La Proposizione che segue caratterizza l'esistenza di un piano proiettivo di ordine n.

I.5.6 Proposizione (Bose R.C.) *Esiste un piano proiettivo di ordine n se e solo se esiste un sistema completo di quadrati latini di ordine n.*

In un primo momento potrebbe sembrare che la Proposizione precedente non sia molto di aiuto nella ricerca di un piano proiettivo di ordine n, in

quanto essa ci riconduce alla determinazione di un sistema completo di quadrati latini. Non fu così per G. Tarry[2], il quale nel 1900 provò che non esiste una coppia di quadrati latini ortogonali di ordine 6. Direttamente diede una risposta negativa al "problema dei 36 ufficiali" e fu determinato il primo intero che non è ordine di un piano proiettivo. La prossima proposizione fornisce una condizione sufficiente sulla non esistenza di un piano proiettivo di ordine n.

I.5.7 Proposizione. (Bruck-Ryser) *Se esiste un piano proiettivo di ordine n e n≡1,2(mod.4), allora n è somma di due quadrati interi.*

I.5.8 Osservazione. Un modo equivalente per enunciare il Teorema di Bruck-Ryser è il seguente: Se n≡1,2(mod.4) e n non è somma di due quadrati interi, allora non esiste un piano proiettivo di ordine n.

Poiché 6 verifica le ipotesi del Teorema di Bruck-Ryser possiamo concludere, in maniera diretta che non esiste un piano proiettivo di ordine 6. Gli interi minori di 20 che sono esclusi come possibili ordini di un piano proiettivo sono: 6, 14. Per gli interi 10, 12, 15, 18 il Teorema di Bruck-Ryser non applicabile.

Nel 1989 è apparso un articolo[3] nel quale, con l'ausilio di calcolatori sofisticati, è stata provata la non esistenza di un piano proiettivo di ordine 10. Una dimostrazione non numerica di tale Teorema è però completamente aperta, alcuni matematici non sono pienamente d'accordio su alcune dimostrazioni assistite da computer *(computer-assisted proof)*. In conclusione se al caso n=10 è stata data una risposta negativa, ancora più lontana pare essere una risposta sull'esistenza di un piano proiettivo di ordine *n=12*.

Bibliografia

L.M. Batten, A. Beutelspacher (1993) *The theory of finite linear spaces*, Cambridge University Press.

[2] Tarry G., *Le probleme des 36 officiers*, C.R. Assoc. Fr. Av. Sci., 1, 122-123, 1900; 2, 170-203, 1901.

[3] Lam C. W. H., Thiel L.- and Swiercz S. *The non-existence of finite projective planes of order 10*, Can. J. Math., XLI, No. 6, 1117-1123, 1989.

N.G. de Bruijn, P. Erdös *On a combinatorial problem*, Indag. Math. 10, 421-423, and Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Sect. Sci. 51, 1277-79.

P. de Witte (1976) *Combinatorial properties of finite plans*, Simon Stevin., 40, 11-19.

L. Euler (1892) *Le probleme des 36 officiers* Rend. Soc. Sc. Flessing, vol.IX.

C.W.H. Lam, L. Thiel, S. Swiercz (1989) *The non-existence of finite projective planes of order 10*, Can. J. Math., XLI, No. 6, 1117-1123.

F. Mazzocca (1993) *Elementi di Geometria su Campi di Galois e di Teoria dei Disegni.* Appunti del Corso di Geometria Superiore, Napoli.

K. Metsch (1991) *Linear spaces with few lines*, Lectures Notes in Mathematics, 1490. Springer –Verlag, Berlin.

D. Olanda (1983) *Note di geometria combinatoria*, Centro Stampa Opera Univ.

Geometrie non euclidee e filosofia. Una proposta didattica interdisciplinare, tra Ernst Cassirer ed Henri Poincaré

Giuseppe Mangione
Direttore di redazione dei Quaderni Caccioppoli
pmangione05@gmail.com

Sunto- *Questo lavoro illustra una proposta didattica interdisciplinare per studenti del liceo, dove, la conoscenza dei fondamenti delle geometrie non euclidee e il dibattito epistemologico scaturito dalla loro scoperta-invenzione, fanno da perno per l'approfondimento di alcune questioni fondamentali di gnoseologia kantiana. In particolare, si analizza la lettura di Cassirer della filosofia di Kant, che ne ribadisce il valore epistemico nel suo caratterizzarsi come gnoseologia e nel rifiuto di una concezione essenzialista di filosofia e scienza, in linea con l'approccio epistemologico "relazionale" di Poincaré.*

Parole chiave: Geometrie non euclidee, Kant, Ontologia, Gnoseologia.

Abstract- *This work illustrates an interdisciplinary teaching proposal for high school students, where knowledge of the fundamentals of non-Euclidean geometries and the epistemological debate resulting from their discovery-invention serve as the pivot for an in-depth study of some fundamental questions of Kantian gnoseology. In particular, it analyzes Cassirer's reading of Kant's philosophy, which reaffirms its epistemic value in its characterization as gnoseology and in the rejection of an essentialist conception of philosophy and science, in line with Poincaré's "relational" epistemological approach.*

Keywords: Non-Euclidean geometries, Kant, Ontology, Theory of knowledge.

Ma misi me per l'alto mare aperto
sol con un legno e con quella compagna
picciola dalla qual non fui diserto.

DANTE, *Inferno* (XXVI, 100-102)

1. Premessa

Uno dei più autorevoli filosofi e storici della filosofia del Novecento, il neokantiano Ernst Cassirer, scrisse che, nell'intera storia della scienza, pochi eventi avevano rivestito «un'importanza così immediata e profondamente decisiva» per la gnoseologia (la parte della filosofia che si occupa del problema della conoscenza) quanto la scoperta delle geometrie non euclidee: il platonismo matematico, «regno delle forme immutabili che accomuna verità filosofica e verità geometrica», viene messo in discussione[1], così come viene messa in discussione la cartesiana tesi dell'evidenza, ed un profondo attacco viene portato, altresì, alla gnoseologia kantiana.

In questo lavoro, che è parte di un progetto di lezioni interdisciplinari pensato per studenti del liceo[2], l'attenzione è focalizzata sull'esito del dibattito epistemologico seguito alla nascita delle "nuove geometrie", e in particolare sulla rilettura dei concetti fondamentali della filosofia critica di Kant, alla luce dell'interpretazione di Cassirer e delle sollecitazioni epistemologiche dettate dal pensiero di Henri Poincaré. L'itinerario filosofico tracciato rappresenterà anche l'occasione per riprendere e vivificare alcune tesi fondamentali della filosofia aristotelica e di quella cartesiana.

2. Geometrie non euclidee: un breve excursus storico

In questo paragrafo sintetizzeremo il percorso storico che ha portato alla costruzione delle geometrie non euclidee, affrontandolo fondamentalmente dal punto di vista metodologico-filosofico (per un'analisi puntuale dei significati geometrico-matematici e didattici della questione, si rimanda

[1] Cfr. (Cassirer 1983), pp. 29-30.

[2] Naturalmente si descrive qui la sola parte filosofico-metodologica e non quella matematica e fisica, sviluppata da colleghi delle specifiche discipline, comunque sempre in un quadro di collaborazione e compresenza interdisciplinare.

all'articolo di F. Casolaro presente in questo volume ed alla bibliografia annessa[3]).

È noto come le geometrie non euclidee siano il prodotto di una riflessione teoretica che nasce dal tentativo di dare una rigorosa dimostrazione del quinto postulato di Euclide. Ora, lo stesso fatto che un postulato abbisogni di una dimostrazione ne mette in discussione la natura assiomatica e lo definisce, piuttosto, come un teorema. Infatti i postulati geometrici (come gli assiomi logico-matematici), in quanto "mattoni di base" su cui si costruisce l'intero sistema, non vanno dimostrati, ma se ne riconosce immediatamente il carattere di verità.

Segnaliamo che, già in riferimento a queste problematiche iniziali, si può sollecitare un approfondimento sulla natura dei concetti di base euclidei in relazione alle nozioni fondamentali di logica aristotelica, che gli studenti imparano a trattare a partire dal terzo anno delle superiori (deduzione e induzione, sillogismi, proposizioni, dottrina dei principi, ecc.). Il carattere assolutamente deduttivo del sistema geometrico euclideo, infatti, è il suo tratto distintivo, nel quale sembrano trovare piena applicazione i principi logici aristotelici.

Pur non nominando mai Aristotele nelle sue opere, Euclide ne fu certamente influenzato: infatti negli *Elementi* si applica quasi fedelmente la metodologia teorizzata da Aristotele negli *Analitici Secondi* ed in particolare la divisione delle "verità di partenza" in definizioni, postulati (specifici per la geometria) e nozioni comuni o assiomi (regole logiche generali valide per tutte le scienze)[4].

Nella sua opera Euclide, dopo aver stabilito ventitré definizioni riferite agli enti geometrici, ne enuncia le proprietà fondamentali a partire da cinque postulati; uno tra questi, il quinto, fu però gradualmente messo in discussione relativamente alla sua natura di verità immediatamente evidente. Questo postulato, infatti, nella sua formulazione originaria, recita:

---

[3] F. Casolaro *Tante proposte di aggiornamento nell'insegnamento della Geometria nel XX secolo. La Scuola lo sa?*

[4] Cfr. Aristotele 1973, pp. 282-284.

«se una retta venendo a cadere su due rette forma gli angoli interni e dalla stessa parte minori di due retti, le due rette prolungate illimitatamente verranno a incontrarsi da quella parte in cui sono gli angoli minori di due retti»[5]. Proclo[6], il più importante commentatore di Euclide, riformulò il postulato in maniera più chiara, nella versione che di solito si attribuisce al matematico scozzese Playfayr[7]. Proclo, tra l'altro, fu tra i primi a cogliere il carattere non autoevidente del postulato e, cosa non meno importante, gli impliciti riferimenti al concetto di infinito, nei confronti del quale è nota l'idiosincrasia degli antichi pensatori greci (in relazione a questo punto si può aprire una "finestra didattica" sulla differenza aristotelica tra *infinito potenziale* e *attuale*, e sul motivo per il quale il secondo postulato euclideo, che pure chiama in causa un riferimento all'infinito, non abbia suscitato analoga avversione nei primi commentatori di Euclide, quasi tutti formatisi su presupposti aristotelici[8]).

Comunque è proprio dalla critica dell'evidenza del quinto postulato e dal tentativo di darne una formulazione più corretta o addirittura di dimostrarlo (trasformandolo da assioma a teorema) che nasce la catena di contributi che porterà alla costruzione delle cosiddette "geometrie non euclidee".

Un momento significativo di questo itinerario teoretico è quello legato all'opera del matematico gesuita italiano Gerolamo Saccheri (1667-1733) che utilizza un procedimento simile, ma non uguale, alla "dimostrazione per assurdo", assumendo come ipotesi la falsità della proposizione da dimostrare e constatando che, anche partendo da tale negazione, non si può che confermare la proposizione iniziale. In effetti il risultato del lavoro di Saccheri fu quello di evidenziare che poteva esistere una geometria diversa da quella euclidea, priva di contraddizioni interne e, involontariamente, di

[5] Euclide 1970, pp.71-72.

[6] Proclo Licio (412–485 d.C.), successore alla Scuola Neoplatonica di Atene. Il suo *Commento al primo libro degli Elementi* è fonte essenziale della geometria di Euclide e tra le opere più importanti sulla storia della matematica greca.

[7] «Per un punto fuori di una retta, passa una sola parallela alla retta data».

[8] Il secondo postulato stabilisce che si possa «prolungare continuamente in linea retta una linea retta limitata». Cfr. (Euclide 1970), pp. 71-72.

dedurre alcuni teoremi che caratterizzeranno le future geometrie non euclidee.

Il matematico tedesco Carl Friedrich Gauss (1777-1855) fu tra i primi ad avere la visione chiara della possibilità d'esistenza di una geometria che potesse fare a meno del quinto postulato, eppure, come scrive Cassirer, «non osò quasi esternare tali pensieri», temendo, come scrisse in una lettera, «lo schiamazzo dei beoti»[9]. È importante rilevare, per gli sviluppi che avrà la nostra analisi, come Gauss temesse proprio la ricaduta "epistemologica" delle sue congetture tra i seguaci della filosofia kantiana (in verità in una interpretazione eccessivamente rigida delle cosiddette *forme pure dell'intuizione sensibile*, tipica degli ambienti universitari matematici di inizio Ottocento a Gottinga, dove Gauss insegnava[10]). Comunque, Gauss non pubblicò gli esiti delle sue ricerche, che vide invece materializzarsi nel 1832, nei lavori di János Bolyai, figlio del suo amico e collega Farkas.

János Bolyai si dedicò alla costruzione di una geometria "nuova" indipendente dal quinto postulato (che definì *geometria assolutamente vera*), dopo i primi tentativi di dimostrazione e nonostante il severo monito di Bolyai-padre: «Ho attraversato questa notte senza fondo, che ha spento ogni luce e ogni gioia della mia vita. Ti supplico, lascia stare la scienza delle parallele»[11]. È il caso qui di sottolineare che la "assolutezza" nella quale János inscriveva la sua geometria non ne presupponeva una superiorità ontologica rispetto a quella euclidea, ma soltanto la coerenza logica, lasciando all'esperienza empirica ed alla fisica la determinazione "corretta" della natura dello spazio. Quando János Bolyai conobbe il giudizio di Gauss sui suoi lavori [12] arrivò persino a sospettare che il padre ne avesse passato al vecchio amico i risultati, ma né Gauss né János Bolyai erano al corrente

[9] Cassirer 1983, p. 29. Gauss scrisse la lettera citata all'amico matematico Friedrich Bessel, nel 1829.
[10] Cfr. Rossi 2006, pp. 120-121.
[11] Ivi, p. 127.
[12] «Lodarlo significherebbe lodare me stesso, tutto il contenuto dello scritto, la via seguita da tuo figlio, i suoi risultati, coincidono quasi del tutto con ciò che ho intrapreso in parte già da una trentina di anni…». Cfr. (Rossi 2006), p. 128.

del fatto che conclusioni analoghe erano state raggiunte, e comunicate pubblicamente nel 1826 all'Università di Kazan, dal matematico russo Nikolaj Lobačevskij, il quale però ammise esplicitamente che le costruzioni geometriche non euclidee sarebbero solo creazioni artificiali, ribadendo la superiorità pratica della geometria euclidea, dove però quest'ultima perdeva il tradizionale carattere di "scienza assoluta", acquisendone quello di "approssimazione" alla realtà.

In effetti Lobačevskij aderiva ad una concezione epistemologica sostanzialmente empirista: non a caso affermò più volte la sua vicinanza alla filosofia di Francesco Bacone, proponendo una metodologia di interrogazione sistematica della natura, diffidando del ricorso alla sola coerenza logica dei teoremi geometrici ed assimilandoli alle leggi della fisica, che trovano conferma esclusivamente nell'esperienza. Anche Lobačevskij riteneva le sue tesi antitetiche rispetto alla filosofia di Kant ma, come vedremo, la sua affermazione sulla natura "artificiale" delle costruzion geometriche e quella annessa, secondo cui «lo spazio in sé non esiste»[13], meritano un approfondimento più accurato, prima di annoverarle tout-court tra le proposizioni confutatorie della gnoseologia kantiana.

Come scrisse Bertrand Russell, i lavori del trio Gauss- Bolyai-Lobačevskij rappresentarono il «primo periodo nello sviluppo della metageometria». La geometria ivi sviluppata fu definita "iperbolica", in relazione al comportamento delle rette rispetto all'infinito (data una retta e un punto esterno a essa, passano infinite rette parallele alla retta data, la somma degli angoli interni di un triangolo è sempre minore di 180° e le superfici hanno curvatura negativa). Sempre secondo Russell, lo scopo fondamentale del lavoro fatto in questo *primo periodo* non fu quello di stabilire la verità della geometria iperbolica, ma «l'indipendenza logica dell'assioma delle parallele dal resto»[14].

---

[13] Cfr. (Rossi 2006), pp. 129-130

[14] Russell intendeva per metageometria nient'altro che lo studio sui fondamenti della geometria. La partizione di Russell riprende quella del matematico tedesco Felix Klein (1849-1925). Cfr. Russell 1997, pp. 20-25.

Cassirer aggiunse che il pieno significato dell'importanza del *problema delle parallele* fu riconosciuto «solo dopo che (1868) apparve la dissertazione di libera docenza del Riemann […] che diede al problema la sua formulazione ben nota e, sotto un certo aspetto, definitiva». Infatti, a parere del filosofo di Marburgo[15], già il titolo della dissertazione (*Sulle ipotesi che stanno alla base della geometria*) contiene implicitamente il nocciolo della rivoluzione prodotta dalle geometrie non euclidee nella storia del pensiero, alludendo a "ipotesi" dove una volta si parlava di "assiomi" e sostituendo all'assolutezza delle verità matematiche, la coerenza con presupposti non necessariamente autoevidenti: per dirla in termini leibniziani le verità matematica cessavano di essere *verità di ragione* per caratterizzarsi come *verità di fatto*[16].

Inoltre, tornando a Russell, in questo «secondo periodo» si pervenne ad una diversa trattazione dello spazio («le proprietà attribuite allo spazio erano espresse in termini non intuitivi, ma algebrici»[17]), anche grazie all'opera di Hermann von Helmholtz (1821-1894) che, mosso dalla esigenza di ribadire il carattere empirico degli assiomi geometrici, produsse un virulento attacco alla filosofia di Kant, che si dimostrerà paradigmatico della maggior parte delle posizioni anti-kantiane fondantesi sulle nuove geometrie non euclidee.

Sulla stessa linea si pone il già citato Klein, che Russell colloca nel «terzo periodo», e che è noto per il cosiddetto "Programma di Erlangen" del 1872 (per il quale un oggetto geometrico esiste e ha senso solo in rapporto al gruppo di trasformazioni in cui è immerso) che scuote alla radice la concezione essenzialista della conoscenza, ribadendone invece il carattere sostanzialmente relazionale. Russell fa iniziare questo «periodo» con il lavoro del matematico inglese Arthur Cayley, successivamente perfezionato e diffuso da Klein, caratterizzandolo come "approccio proiettivo", che

---

[15] In Germania, a metà Ottocento, sorsero due famose scuole filosofiche neokantiane, una di indirizzo gnoseologico a Marburgo (Cohen, Cassirer, Natorp), l'altra d'orientamento storicistico, nella regione del Baden (Rickert, Windelband).

[16] Cfr. (Cassirer 1983), pp. 29-30. Bernhard Riemann (1826 – 1866) matematico e fisico tedesco, insegnò all'Università di Gottinga alla cattedra che fu di Gauss.

[17] (Russell 1997), p. 25.

abbandona i metodi metrici e la sottomissione al concetto di quantità spaziale, e dimostra che le proprietà metriche delle geometrie (euclidee e non euclidee, classificate in paraboliche, ellittiche e iperboliche) si possono ricavare come casi speciali di proprietà proiettive.

Tralasciamo gli ulteriori sviluppi della scienza matematica intorno al tema delle geometrie non euclidee, menzionando solo un momento fondamentale per il nostro itinerario, foriero di capitali conseguenze gnoseologiche, e cioè l'applicazione della geometria riemanniana (o ellittica) alla teoria della relatività generale di Albert Einstein. Come scrisse Cassirer siamo qui di fronte ad una vera e propria «rivoluzione del modo di pensare», in quanto, con la suddetta applicazione «la fisica ora dimostra non solo la possibilità, ma la stessa realtà della geometria non euclidea» e dimostra altresì che «possiamo intendere e esporre teoricamente i rapporti che vigono nello spazio "effettuale", soltanto se li traduciamo nel linguaggio di una molteplicità quadridimensionale non euclidea» [18]. Quello che a molti era sembrato un mero esercizio logico-geometrico, una controintuitiva bizzarria da "iniziati", diventa un efficace strumento di descrizione del mondo reale, nella sua più complessa, ed apparentemente impenetrabile, struttura.

3. Il contraccolpo epistemologico: decostruzioni e crolli, veri e presunti

Abbiamo già visto come, nell'analisi di Cassirer, le geometrie non euclidee producano una messa in discussione non solo della verità matematica ma del concetto stesso di verità, mettendo in crisi quel legame indissolubile tra verità geometrica e verità filosofica che era stato, fin dall'antichità, un pilastro gnoseologico solido e inattaccabile. Da Platone ad Aristotele, da Galileo a Leibniz, passando per Cartesio, la certezza apodittica delle verità geometriche non fu mai messa in discussione. Certo, nella filosofia moderna, vi sono notevoli differenze sul ruolo assegnato ad evidenza, intuizione e logica, nella definizione di questa apoditticità.

[18] Cfr. (Cassirer 1997), p. 138.

In Cartesio v'è la più fedele ripresa del modello platonico e la dissociazione da ogni forma di empirismo o di considerazione della scienza come artificio. Per il grande filosofo-matematico francese le leggi universali e le verità matematiche sono innate e non provengono dalla realtà, sono decise da Dio arbitrariamente, al di sopra della logica: Dio ha scelto *l'ordine delle ragioni* secondo cui il processo naturale si svolge ed ha impresso nella mente umana le *ragioni dell'ordine.* Nella sua opera, infatti, Cartesio stabilisce un'indissolubile omologia tra gnoseologia, ontologia e teologia, sostanzialmente in linea con il pensiero platonico e galileiano, affermando che nella nostra interiorità troviamo «l'idea di un essere sommamente perfetto» allo stesso modo in cui intuiamo l'idea di figura o numero, e intendiamo chiaramente che l'esistenza appartiene necessariamente alla natura di Dio così come una proprietà appartiene alla «natura del triangolo»[19].

Leibniz, invece, diffidò profondamente dell'intuizione e dell'evidenza e ribadì sempre l'esigenza di una dimostrazione logica degli assiomi geometrici, fondando l'apoditticità della matematica sulla sua natura di scienza analitica e formale, le cui verità risiedono nell'intelletto divino indipendentemente dall'esistenza del mondo fisico. Per Spinoza la geometria rispecchia la struttura ontologica della sostanza ed assume un ruolo di vero e proprio modello di razionalità generale, al punto che il suo capolavoro sull'etica fu scritto utilizzando la struttura formale degli *Elementi* di Euclide (*Etica dimostrata secondo l'ordine geometrico*). Neppure lo scetticismo estremo di David Hume, infine, arrivò a mettere in discussione la necessarietà ed immutabilità delle verità geometrico-matematiche, pur negandone la valenza ontologica e intendendole esclusivamente come "rapporti tra idee". L'apoditticità matematica trovò poi il suo punto terminale, quasi la sua caratterizzazione definitiva, in Kant, nella risposta al suo fondamentale interrogarsi sulle condizioni di possibilità della matematica pura, una «conoscenza che ha in sé, da parte a parte, una

[19] È il tema sviluppato ampiamente nella "Quinta meditazione". Cfr. (Descartes 2001), pp. 105-117.

certezza apodittica, cioè un'assoluta necessità, e non ha perciò un fondamento sperimentale, una conoscenza che è quindi un puro prodotto della ragione, ma anche sintetica»[20] .

Ma, come scrive efficacemente Cassirer riferendosi alle geometrie non euclidee, «se la geometria deve la sua certezza alla ragione pura, quale stranezza non è mai questa di una ragione che possa approdare a sistemi diversi e contraddittori nelle loro conseguenze, e che tuttavia pretenda per essi la medesima *verità*?»[21]. Siamo forse qui di fronte al collasso dell'idea di unità della ragione, nel *logos*, che ha caratterizzato filosofia e scienza fin dal loro comune atto generativo?

Al vacillare dei concetti di "apoditticità" ed "evidenza", e alla messa in discussione della natura dell'intuizione matematica, si aggiunge poi un'ulteriore questione, che chiama ancora più direttamente in causa la filosofia kantiana: la definizione di una nuova concezione dello spazio, che, tra l'altro, assorbe in essa la già citata problematica dell'intuizione.

In verità l'ipostatizzazione metafisica dello spazio come "modo" della sostanza (presente in Cartesio e Spinoza) era già stata messa in discussione da Leibniz, che ne sottolineò il carattere ideale designando lo spazio come "forma" pura, ed in particolare come forma *dell'ordine della giustapposizione.* Siamo qui ad una sorta di anticipazione di una delle caratteristiche fondamentali del nuovo quadro epistemologico prodotto dall'evoluzione della matematica: il passaggio dal primato della "misura" a quello dell'"ordine" e della "relazione".

L'attacco più profondo delle nuove geometrie, però, sembra essere rivolto alla filosofia kantiana (o meglio ad una riduttiva ma non infondata interpretazione di questa), che abbiamo visto già materializzarsi nel paragrafo precedente, nei riferimenti critici al filosofo di Königsberg avanzati da Gauss, Lobačevskij ed Helmholtz.

È noto che, nella parte della *Critica della ragion pura* dove analizza la sensibilità come precondizione del processo di conoscenza (*Estetica*

[20] (Kant 1979), p. 34.
[21] (Cassirer 1983), p. 32.

trascendentale), Kant definisca la sua concezione della geometria come «scienza che determina le proprietà dello spazio sinteticamente e, nondimeno, a priori», e nello stesso tempo ribadisca che lo spazio non è né un «concetto empirico» ricavato induttivamente dall'esperienza, né un «concetto discorsivo», ma «è una rappresentazione necessaria a priori che sta a fondamento di tutte le intuizioni esterne», una *intuizione pura* che è «la condizione della possibilità dei fenomeni»[22] (si badi bene: dei *fenomeni* e non del *noumeno*; e si ricordi che, per Kant, la *realtà fenomenica* è l'unica "realtà" conoscibile dall'uomo).

Ora possiamo rilevare due livelli della critica a Kant derivanti dalla costruzione (o scoperta) delle geometrie non euclidee. Il primo (che possiamo definire "critica debole") mette in discussione esclusivamente la natura che Kant conferiva alla geometria ed al collegato concetto di spazio: se le geometrie non euclidee sono logicamente possibili, e quindi esistono più geometrie coerenti, lo spazio non è più un'intuizione unica e la geometria euclidea cessa di essere l'unica verità assoluta a priori, diventando solo una delle tante descrizioni possibili dello spazio. Il secondo (critica "forte") tiene conto dei risultati citati nel paragrafo precedente, circa l'applicazione della geometria di Riemann alla teoria della relatività: se è la conferma empirica a garantire la validità "reale" di una geometria (a posteriori), allora la *relatività generale* ha dimostrato definitivamente che lo spazio fisico reale è curvo (non euclideo) e modellato dalla massa, confutando l'idea kantiana di spazio come "legge universale della mente" a favore di una sua connotazione come "proprietà fisica dell'universo" da scoprire con l'esperienza, aprendo inoltre la strada ad una più generale critica degli stessi concetti di "sintetico a priori" e di "trascendentale".

Prima di analizzare la risposta di Cassirer ai critici di Kant, vediamo come si inserisce in questo dibattito epistemologico la figura di un grande matematico, fisico ed epistemologo francese: Henri Poincaré.

[22] Cfr. (Kant 2005), pp. 56-57.

4. Il convenzionalismo di Henri Poincaré

Jules Henri Poincaré (1854-1912), oltre ad aver dato fondamentali contributi alla matematica e alla fisica, ebbe competenze e *forma mentis* marcatamente filosofiche e la sua riflessione sulle geometrie non euclidee lo condusse ad elaborare un'originale concezione *convenzionalista* della geometria, con la quale cercò di superare i limiti delle teorie epistemologiche razionaliste ed empiriste.

Poincaré ammise che, il kantiano ricorso ad una intuizione pura e la caratterizzazione degli assiomi geometrici come *giudizi sintetici a priori*, si trovino in scacco di fronte alla costruzione di geometrie alternative, ma negò decisamente che gli stessi assiomi possano essere considerati verità sperimentali. Rilevò, infatti, come non sia possibile sperimentare «su rette o su circonferenze ideali», ma solo su oggetti materiali, ragionando «come se le figure geometriche si comportassero alla maniera dei corpi solidi». Concluse, quindi, che «ciò che la geometria prende in prestito dall'esperienza» non è altro che la diversità delle proprietà di questi corpi, e che, se la geometria fosse una scienza sperimentale, «non sarebbe una scienza esatta» e «sarebbe soggetta a una continua revisione»[23].

Dunque, se gli assiomi geometrici non possono classificarsi né tra i *giudizi sintetici a priori* né tra i «fatti sperimentali», per Poincaré, non rimane altra strada che considerarli delle *convenzioni,* aggiungendo che la scelta fra tutte le convenzioni possibili, seppure guidata dai fatti sperimentali, resta comunque *libera,* ed è limitata soltanto dalla necessità di evitare le contraddizioni.

Inoltre, la stessa domanda circa il maggiore o minore carattere di "verità" di una geometria rispetto ad un'altra, appare a Poincaré destituita di ogni senso: l'unica differenza che si può stabilire tra esse attiene esclusivamente alla "comodità", cioè alla capacità di dare una descrizione dei fenomeni che si avvicini quanto più possibile al mondo reale, ed in questo la geometria euclidea mantiene un vantaggio sulle altre, sia a causa della sua semplicità («allo stesso modo per cui un polinomio di primo grado è più semplice di

[23] Cfr. (Poincaré 2012), pp. 58-59.

un polinomio di secondo grado»), sia perché «si accorda sufficientemente con le proprietà dei solidi naturali, quei corpi ai quali si accostano le nostre membra e il nostro occhio, e con cui realizziamo i nostri strumenti di misura»[24].

Il convenzionalismo di Poincaré però non è radicale e non cade negli estremi della filosofia di Eduard Le Roy (1870-1954), per il quale tutta la scienza non sarebbe altro che un insieme di regole pratiche, senza alcun rapporto con la *verità.* Anzi, nell'opera *Il valore della scienza* (1905), Poincaré si oppone decisamente all'*anti-intellettualismo* di Le Roy*,* assumendo una posizione che, nonostante la citata critica a Kant sul *sintetico a priori*, a nostro avviso è sostanzialmente "kantiana", ed anzi anticipa proprio gli argomenti che Cassirer, come vedremo, utilizzerà nella sua difesa di Kant. Scrive infatti Poincaré: «Chiedersi quale sia il valore oggettivo della scienza non significa chiedersi se la scienza ci fa conoscere l'autentica *natura delle cose*, ma se ci fa conoscere gli autentici *rapporti delle cose*».

Ora, negare che la scienza possa cogliere *la natura* delle cose è esattamente la versione "forte" dell'inconoscibilità della "cosa in sé" di Kant. Le parole che usa Poincaré sono a tal proposito suggestive ma difficilmente travisabili: «non soltanto la scienza non può farci conoscere la natura delle cose, ma nulla è in grado di darci questa conoscenza e, se un dio la conoscesse, non potrebbe trovare le parole per esprimerla». Siamo di fronte ad un passo che (se è forse eccessivo accostare al *Nulla è, ed anche se fosse non sarebbe né conoscibile, né esprimibile* di Gorgia[25]) certamente è assimilabile alla negazione kantiana dell'intelligibilità del *noumeno*.

Il secondo argomento, cioè la conoscibilità scientifica esclusiva dei soli *rapporti*, è ancora più direttamente collegabile alle tesi di Cassirer. La scienza, dice Poincaré, «è innanzitutto una classificazione, un modo di collegare eventi che le apparenze separavano nonostante fossero legati […]

[24] Cfr. Ivi, p. 60.

[25] Frammento di Gorgia riportato da Sesto Empirico, *Contro i matematici* (VII, 65-87). Cfr. G. Giannantoni (a cura di*), I Presocratici. Testimonianze e frammenti*, vol. II, Laterza, Bari 1969, pp. 917-924.

è un *sistema di relazioni* […] solo nelle relazioni deve essere cercata l'oggettività; sarebbe vano cercarla negli esseri considerati isolati gli uni dagli altri»[26]. Questo però non vuol dire che lo scienziato "crea" i fatti: le teorie scientifiche sono equiparati a linguaggi che riescono a mettere in relazione i *fatti bruti*, la convenzione sta unicamente nel "linguaggio" e non nelle relazioni, che assurgono ad ineliminabili "residui", quando questi linguaggi si traducono l'uno nell'altro[27].

Il valore teoretico della scienza è così recuperato, rispetto al rigido nominalismo di Le Roy, e nelle pagine finali dell'opera, si avverte anche l'eco di una kantiana individuazione della *dignità* dell'uomo nel *pensiero*: «Il pensiero non è che un lampo in una lunga notte. Ma questo lampo è tutto»[28].

5. Cassirer: la difesa di Kant

Cassirer ammette che l'adozione dello spazio riemanniano, all'interno della teoria della relatività generale, imponga la messa in discussione dell'apriorismo geometrico kantiano. Anzi siamo qui di fronte al momento più significativo del passaggio *dal concetto di sostanza a quello di funzione*, che egli individuava come la svolta fondamentale impressa dalla conoscenza matematica a quella scientifica generale, con le inevitabili ricadute sulla riflessione filosofica. In particolare è la dottrina matematica di Hilbert che definisce questa importante innovazione, che sposta il *focus gnoseologico* dalla *sostanza* alla *funzione*: «la matematica è, e resterà sempre, una *pura dottrina di rapporti* […] è vero che parla di certe forme e ne indaga la natura, ma è altresì vero che non ricerca mai *l'essere in sé* di quelle forme […] quel che vuole appurare e che unicamente le interessa

[26] (Poincaré 1992), pp. 191-192.
[27] Cfr. Ivi, pp. 172-179.
[28] Ivi, p. 198.

sono i *rapporti* in cui quelle forme stanno fra di loro»[29] (si noti l'analogia con le tesi di Poincaré) .

Secondo Cassirer, è proprio la filosofia kantiana che, con la rinuncia ad essere ontologia e col netto ed obbligato caratterizzarsi come teoria critica delle condizioni del conoscere (quindi come gnoseologia), apre la strada per il fecondo abbandono di ogni concezione essenzialista della scienza e, conseguentemente, della filosofia. Cassirer non nega la necessità di una sostanziale revisione dell'*Estetica trascendentale*, ma non pensa che geometrie non euclidee e relatività generale possano mettere in crisi la fondamentale tesi kantiana della necessità di schemi o filtri per unificare il molteplice fenomenico in teorie "scientifiche" (il cui il modo di essere "a priori" va certo riconsiderato, ma non negato a favore di un mero *induttivismo*, pena la ricaduta nelle difficoltà logiche humiane che, come si sa, destarono Kant dal cosiddetto «sonno dogmatico»[30]).

Tra l'altro, per Cassirer, il ricorso di Einstein alle geometrie non euclidee non mette in crisi la complessiva visione kantiana. Infatti, nel suo saggio del 1921 sulla *relatività*, scrive che il risultato gnoseologico principale di questa è consistito nel «togliere allo spazio l'ultimo residuo di oggettività fisica» tramite il linguaggio della geometria non euclidea, che però «è e rimane un linguaggio puramente ideale e simbolico», così come era quello della geometria euclidea, capace di esprimere esclusivamente la realtà sotto forma «di leggi e di relazioni» e non sotto forma di «cose».

Cassirer ritiene, infatti, che «dal punto di vista gnoseologico» sia lecito chiedersi soltanto se, tra le costruzioni simbolico-geometriche e la molteplicità empirica, sia possibile stabilire una «relazione e un coordinamento univoci», ribadendo "l'ingenuità" di un'applicazione "non mediata" della teoria della "corrispondenza". La relatività di Einstein, continua Cassirer, non nega l'esigenza di «un a priori dello spazio» come

[29] Cfr. (Cassirer 1983), p. 34. La tesi è sviluppata in un importante saggio del 1907: trad. it., Cassirer E., *Il concetto di* sostanza *e il concetto di funzione*, Morcellania, Brescia, 2018.

[30] L'affermazione di Kant si trova nella *Prefazione* ai *Prolegomeni*, Op. cit., Kant 1979, p. 8.

«condizione di ogni teoria fisica», ma implica soltanto la messa in discussione di quella determinazione specifica della «spazialità in generale» (la determinazione kantiana, necessariamente condizionata dagli sviluppi della scienza del suo tempo).

In effetti, per il concetto di spazio varrebbe ciò che Kant stabilisce per i concetti dell'intelletto, cioè «che servono solo a sillabare fenomeni per poterli leggere come esperienze»[31]. E in questa "determinazione" più corretta di Einstein, subentrano anche assiomi e leggi geometriche non euclidee, che non eliminano «l'unità del mondo» ma «si sintetizzano nell'unità di un principio supremo, nell'unità del postulato universale della relatività». La *relatività generale*, quindi, non implica una diversa «presenza ontologica» riferita al concetto di spazio, ma solo una diversità nella sua modalità di rappresentazione»[32].

La posizione di Cassirer si palesa qui in tutta la sua chiarezza: si tratta di «andare oltre Kant partendo dagli stessi presupposti kantiani». Lo scopo della *filosofia critica* non è quello di «fissare una volta per tutte la conoscenza filosofica a un determinato sistema dogmatico di concetti, ma di aprirle il cammino sicuro di una scienza»[33]. Di Kant rimarrebbe in piedi il "cuore" della sua rivoluzione epistemologica, che sta nella trasformazione della metafisica da ontologia a gnoseologia e nel circoscrivere la conoscenza a *conoscenza fenomenica* e non essenzialista.

La vecchia metafisica», dice infatti Cassirer, era ontologia: partiva da un'idea dell'essere e indagava poi il mondo delle cose; empirismo e razionalismo si dividevano sulla natura dei mezzi conoscitivi con cui ci si appropria dell'essere ma condividevano la prospettiva «che un siffatto essere esista». Per Kant invece la domanda fondamentale da porsi non è *cos'è l'essere*, ma «cosa significhi in generale la domanda intorno all'essere»: cosa significhi quella *realtà effettuale*, che la mente deve accogliere in sé e riprodurre[34]. Si tratta di indagare il rapporto tra

[31] Cfr. (Cassirer 1997), pp. 141-143.
[32] Cfr., Ivi, pp. 150-151.
[33] Cfr., Ivi, pp. 41-42.
[34] Cfr. (Cassirer 2016), pp. 137-138.

rappresentazione e oggetto (pensare tale oggetto come qualcosa in generale) e chiarire come *l'oggettività* (cioè questa rappresentazione dell'oggetto in un concetto) derivi da un processo di sintesi: l'intelletto, tramite una regola, limita il molteplice e lo determina, rendendo possibile *l'unità dell'appercezione.*

Questa operazione sfocia nel mutamento di prospettiva che sta alla base della sua "rivoluzione copernicana" e ridefinisce il problema gnoseologico dell'essere; «non è perché esista un mondo di cose che ci si dà un mondo di nozioni e verità come loro copie», ma è perché si danno giudizi certi, che designiamo le impressioni come ordinamento di oggetti[35]. Prima di Kant ogni nostra conoscenza doveva regolarsi sugli oggetti, con Kant sono gli oggetti che debbono regolarsi sulla nostra conoscenza. La rivoluzione sta nel fatto che ora il punto di partenza è la *riflessione della ragione su se stessa*, sui presupposti e i principi che la strutturano.

Il *trascendentale*, in quest'ottica, si riferisce alla *conoscenza* che si occupa del *modo di conoscere.* È proprio Kant a scrivere che «né lo spazio né una qualunque determinazione geometrica a priori di esso sono rappresentazioni trascendentali»[36]: è trascendentale la conoscenza del fatto che tali rappresentazioni possono riferirsi a priori agli oggetti. E il concetto di *soggettività* non significa meramente partire dal soggetto conoscente e non dall'oggetto: significa partire da una legalità specifica della conoscenza, da una *legge universale della ragione*.

Quindi l'analisi trascendentale vuole scoprire come si presenti la "realtà effettuale" attraverso le scienze (conoscenza), ma sul cosa questa realtà sia in sé, «non ha più nessuna risposta»; una simile domanda risospingerebbe la filosofia «nello spazio vuoto dell'astrazione».

Nelle pagine che stiamo esaminando, relative alla sua più organica opera su Kant, Cassirer delinea con chiarezza compiti e struttura di una filosofia che tenga conto dei fondamenti della sua lezione: «La *metafisica* se mai in generale vuole avere per sé un determinato contenuto, deve per forza essere

[35] Cfr. (Kant 2005), pp. 109-128.
[36] Ivi, p. 80.

metafisica delle scienza, dottrina dei principi della matematica e della conoscenza della natura, oppure metafisica dei costumi, del diritto, della religione, della storia»[37]. Come scriveva Kant, le sue fiaccole possono illuminare solo lo spazio buio del nostro proprio intelletto: «l'orgoglioso nome di Ontologia, che presume di dare in una dottrina sistematica conoscenze sintetiche a priori delle cose in generale […] deve cedere il posto a quello più modesto di semplice *Analitica dell'intelletto puro*»[38] .

Se quindi da un lato la *filosofia critica* si definisce in relazione al proprio limite di indagine sui modi e i presupposti del conoscere (il trascendentale), i contenuti specifici dei processi conoscitivi sono a loro volta delimitati dalla natura esclusivamente *fenomenica* del loro oggetto.

Kant, continua Cassirer, definisce una necessità originaria inscritta nel nostro modo di conoscere: percepiamo connessioni oggettive di fenomeni perché le impressioni si succedono con «una rigorosa legalità». Le condizioni della possibilità dell'esperienza sono le condizioni di tutto ciò che possiamo conoscere: se siano possibili altri oggetti al di fuori dell'esperienza è questione «del tutto oziosa» [39]. E questa conoscenza del fenomeno è per Kant *strutturalmente relazionale,* costituita da semplici *rapporti*, e *non ontologica*; scrive infatti nella *Critica della ragion pura*: «tutto ciò che nella nostra conoscenza appartiene all'intuizione (esclusi dunque il sentimento del piacere e del dolore, e la volontà, che non sono punto delle conoscenze) non contiene altro che non semplici *rapporti:* di luoghi in un'intuizione (estensione), cangiamento di luoghi (movimento), e leggi secondo cui questo cangiamento è determinato (forze motrici). Ma cosa ci sia nel luogo, o che cosa operi nelle cose stesse, oltre il cangiamento di luogo, con ciò non ci viene dato»[40].

Come abbiamo visto all'inizio di questo paragrafo, è proprio questa impostazione "relazionale" della filosofia di Kant che, per Cassirer, dimostra l'indipendenza del suo metodo trascendentale dalla fisica di

[37] Cfr. (Cassirer 2016), p. 143-145.
[38] (Kant 2005), p. 205.
[39] Cfr. (Cassirer 2016), p. 159.
[40] (Kant 2005), p. 72.

Newton, e la conciliabilità con gli sviluppi della *relatività generale* di Einstein, che, riducendo lo spazio, il tempo e la materia a puri rapporti geometrico-differenziali e non a entità assolute, non farebbe altro che portare a compimento l'intuizione kantiana secondo cui la realtà fenomenica è pura relazione e il *noumeno* rappresenta solo un concetto-limite regolativo, la direzione infinita verso cui tende la nostra catalogazione relazionale del mondo.

6. Conclusioni

La caratterizzazione kantiana della filosofia come gnoseologia e l'abbandono di ogni pretesa ontologica potrebbero suscitare (e certamente in non pochi filosofi lo hanno fatto) l'idea di una preconcetta *limitazione* del sapere filosofico, rispetto all'universalità ed all'onnicomprensività che tradizionalmente hanno sempre contraddistinto quest'ultimo, e che ne hanno segnato sia l'origine sia gli sviluppi. Ma non è affatto così! In Kant esiste un'inedita definizione del concetto di *ragione*, distinto da quello di *intelletto*, che, se non si coglie nel suo intimo significato, può comportare un vero e proprio fraintendimento della sua filosofia.

In un celebre passo della *Critica della ragion pura*, Kant descrive il "territorio" dell'intelletto (quello della conoscenza scientifica e della filosofia come gnoseologia) come un'isola sicura, unico luogo al quale è possibile riferirsi col termine di "verità". Ma «questa terra della verità» è circondata da «un vasto oceano tempestoso», dove nebbie e ghiacci danno l'illusione dell'esistenza di «nuove terre», che spingono il «navigante errabondo» ad inoltrarsi in quel mare, in «avventure alle quale egli non sa mai sottrarsi e delle quali egli non può mai venire a capo»[41].

È la metafora di un *bisogno metafisico*, della ricerca di un *oltre*, che nell'uomo non può essere in nessuna misura soppresso, e che lo stesso Kant esplora nelle altre due *Critiche*, dove (allegorizzando la terzina dantesca in epigrafe) si può dire che affronti il "mare aperto" del "senso" con il "legno" della *ragione* (l*'imperativo categorico* della *Seconda Critica*) e con la

[41] Ivi, p. 199.

"compagna picciola" dell'*appartenenza al genere umano* (l*'universalità del giudizio* in quanto uomini, della *Terza Critica*).

Nella stessa *Critica della ragion pura,* tra l'altro, Kant "apre" alle complessive domande che è lecito porsi in quanto esseri pensanti (*Cosa posso sapere? Cosa devo fare? Cosa mi è dato sperare?*), nella consapevolezza che in quel luogo si sono definiti esclusivamente i termini per la risposta alla prima domanda [42].

Ora, in questo lavoro, ci siamo limitati ad alcuni cenni esplorativi riferibili al solo territorio "sicuro" dell'intelletto, ed abbiamo visto come tale sicurezza sia tutt'altro che scontata: la problematica delle geometrie non euclidee, le diverse interpretazioni epistemologiche del criticismo kantiano, il convenzionalismo di Poincaré, ci hanno fatto comprendere come, anche nel "recinto" definito da scienza ed esperienza, sia molto difficile riferirsi ad un'assolutezza della "verità".

Nei *Fratelli Karamazov* di Dostoevskij, le geometrie non euclidee assurgono a metafora del disorientamento provocato dalla messa in discussione delle verità assolute[43]. Noi crediamo, invece, che il riesame critico delle verità e la loro riformulazione siano il "sale" dell'investigazione filosofica e il più forte antidoto al dogmatismo, in questo del tutto "fedeli" (si perdoni l'apparente contraddizione) al nocciolo della lezione di Kant, riassumibile nelle magistrali parole di una sua famosa lettera al discepolo Marcus Herz: «Lei sa che le obiezioni razionali non vengono considerate da me soltanto con l'intenzione di confutarle, ma che nel ripensarle le accolgo nell'ordito dei miei giudizi, dando ad esse l'opportunità di ribaltare tutti i miei più radicati preconcetti. Considerando i

---

[42] Ivi, p. 495. Successivamente, nell'introduzione alle sue lezioni di *Logica* (1800), Kant aggiunge una quarta domanda ("*Cos'è l'uomo?"*) che aveva già sviluppato nei suoi scritti sull'*Antropologia* (1798).

[43] Nelle parole dello "scettico" Ivan Karamazov: "Eppure ci sono matematici e filosofi, notevolissimi, che dubitano del fatto che il mondo sia stato creato solo secondo la geometria euclidea […] siccome non arrivo a capire questo, tanto meno posso capire ciò che riguarda Dio". F. Dostoevskij, *I fratelli Karamazov*, Rizzoli, Milano, 2018, p. 254.

miei giudizi imparzialmente dal punto di vista di altri, spero sempre di approdare ad una t*erza posizione,* che sia migliore della mia precedente»[44].

Bibliografia

Aristotele (1973) *Secondi Analitici*, in Aristotele, *Opere,* volume primo, Laterza, Bari.

R. Descartes (2001) *Meditazioni metafisiche*, Laterza, Bari.

E. Cassirer (1983) *Storia della filosofia moderna*, volume sesto, Newton Compton, Roma.

E. Cassirer (1997) *Teoria della relatività di Einstein*, Newton Compton, Roma.

E. Cassirer (2016) *Vita e dottrina di Kant*, Castelvecchi, Roma.

Euclide (1970) *Gli Elementi*, libro I, a cura di A. Frajese e L. Maccioni, Utet, Torino.

I. Kant (1979) *Prolegomeni ad ogni futura metafisica che si presenterà come scienza*, Laterza, Bari.

I. Kant (2005) *Critica della ragion pura*, Laterza, Bari.

H. Poincaré (1992) *Il valore della scienza*, Dedalo, Bari.

H. Poincaré (2012) *La scienza e l'ipotesi*, Dedalo, Bari.

P. Rossi (2006) a cura di, *Storia della scienza,* vol. 4*,* cap. V, *La scienza dello spazio e la geometria «immaginaria»* di U. Bottazzini*,* Gruppo Editoriale L'Espresso, Roma.

B. Russell (1997) *I fondamenti della geometria*, Newton Compton, Roma.

[44] I. Kant, Lettera a Marcus Herz del 7 giugno 1771, in Epistolario filosofico 1761-1800, a cura di O. Meo, il melangolo, Genova, 1990, p. 62.

Introduzione alla geometria della sfera come modello di geometria non euclidea

Luigi Tomasi
Centro Ricerche Didattiche "U. Morin", Pieve del Grappa (TV)
luigi.tomasi@unife.it

Sunto- *La geometria euclidea della sfera viene a volte trascurata, perché ritenuto un argomento difficile o troppo particolare. Nell'ottica di un'introduzione alle geometrie non euclidee agli studenti dell'ultimo anno delle scuole secondarie di II grado, la geometria sferica può invece rappresentare un esempio molto interessante. In questo contributo ci proponiamo di introdurre, con l'uso di un software di geometria, alcune proprietà che caratterizzano la geometria della sfera, come modello di geometria non euclidea.*

Parole chiave: Geometria della sfera; triangolo sferico; geometria non euclidea

Abstract- *The Euclidean geometry of the sphere is sometimes overlooked, as it is considered a difficult and overly specific topic. However, in the context of introducing non-Euclidean geometries to students in their final year of upper secondary school, spherical geometry can represent a very interesting example. In this contribution, we aim to introduce, by a geometry software, some properties that characterize the geometry of the sphere as a model of non-Euclidean geometry.*

Keywords: Spherical geometry; spherical triangle; non-Euclidean geometry

1. Introduzione

Un tema particolarmente interessante, per le possibilità di collegamenti interdisciplinari che permette nella scuola secondaria di II grado, è quello della geometria non euclidea. Citando il matematico Richard J. Trudeau:

La rivoluzione non euclidea è una rivoluzione scientifica, importante quanto la rivoluzione copernicana in astronomia, la rivoluzione darwiniana in biologia, o quanto la rivoluzione newtoniana o quella del secolo XX in fisica, rivoluzione che è però di gran lunga meno nota perché i suoi effetti sono stati più indiretti: una rivoluzione nata dall'invenzione di

un'alternativa alla tradizionale geometria euclidea. (R.J. Trudeau, *La rivoluzione non euclidea*, p. 13, 1991).

Il matematico e didatta Francesco Speranza (1932-1998), scrivendo sull'introduzione della geometria non euclidea nella scuola secondaria di secondo grado, scriveva:

Si tratta di un'occasione di eccezionale importanza per ricostruire nella didattica quello che essa ha significato nella storia: cambiare la concezione della geometria, anzi di tutta la matematica: è vero che la matematica "non butta via" i risultati già conseguiti, tuttavia li ricolloca in un quadro profondamente mutato. In questo senso, si può dare all'insegnamento della geometria un carattere più dinamico. (F. Speranza, *Dallo spazio alla geometria*, articolo del 1997).

2. Il V postulato degli *Elementi* di Euclide

La formulazione di Euclide del V postulato è la seguente. Si postula che (figura 1):

se una retta venendo a cadere su due rette forma gli angoli interni e dalla stessa parte minori di due retti [*tali che la loro somma sia minore di due retti*]*, le due rette prolungate illimitatamente verranno ad incontrarsi da quella parte in cui sono gli angoli minori di due retti.* (A. Frajese e L. Maccioni, a cura di, *Gli Elementi di Euclide*, p. 71, 1970)

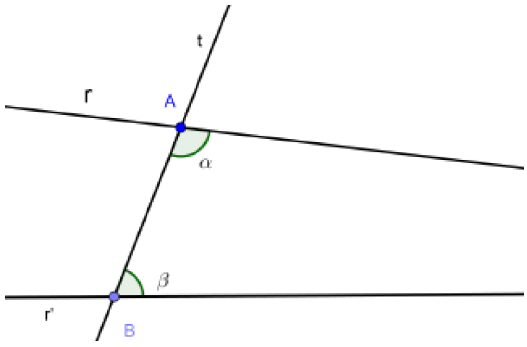


Figura 1. Il V postulato di Euclide

Il V postulato di Euclide è stato considerato già dai grandi geometri dell'antichità meno intuitivo degli altri per i seguenti motivi:

1) la sua stessa formulazione sembra più un teorema che un postulato (tanto che il suo inverso è proprio un teorema, ed è la proposizione 17 del I libro);

2) parla di un comportamento globale, all'infinito.

Secondo i canoni della concezione aristotelica dell'assiomatica, i postulati devono essere in sé stessi evidenti, e tale fatto per secoli non è stato chiaro proprio riguardo al V postulato degli *Elementi* di Euclide. Per questo motivo molti matematici hanno tentato nel corso dei secoli di dimostrarlo a partire dai primi quattro postulati. Non dimentichiamo che la posizione di Euclide concorda con quella di Aristotele, il quale afferma "i matematici non hanno bisogno dell'infinito e non lo usano: essi postulano soltanto il fatto che un segmento si possa estendere a piacere".

Già il grande commentatore Proclo (410-485 d.C.) critica la formulazione del V postulato data da Euclide dicendo in sostanza che *due rette in tali condizioni si avvicinano certo indefinitamente, ma potrebbero essere asintotiche.*

Lo stesso Euclide avvertì la problematicità di questo postulato, tanto da rinviarne il suo uso il più possibile (per la prima volta viene utilizzato nella Proposizione 29, del Libro I degli *Elementi*). Egli infatti dimostra senza il V postulato alcune proposizioni che non utilizzerà successivamente e che altro non sono che casi particolari di teoremi più generali che lui stesso dimostrerà un po' più avanti per mezzo del V postulato (e il cui utilizzo è proprio necessario). Ci si è chiesti per due millenni la ragione di questo comportamento di Euclide, il quale rinvia fino a che è possibile l'uso del V postulato; comincia a utilizzarlo solo dalla proposizione 29, che si sa oggi effettivamente non dimostrabile senza sfruttare il V postulato (e, di certo, lo sapeva anche Euclide…).

Nella Proposizione 31 del I libro Euclide dimostra che "È (sempre) possibile condurre per un punto dato una retta parallela ad una retta data" (questa proposizione si dimostra senza utilizzare il V postulato). La vera sostanza del V postulato è quindi *l'unicità* della parallela per un punto, perché una parallela si riesce a costruire (Prop. 31 del libro I).

Dal 1795 e ancora oggi, nei libri di testo, si usa un'altra formulazione, di John Playfair, di questo postulato (figura 2), che viene enunciata nel seguente modo: *dato un punto P esterno a una retta, per esso passa una ed una sola parallela alla retta data.*

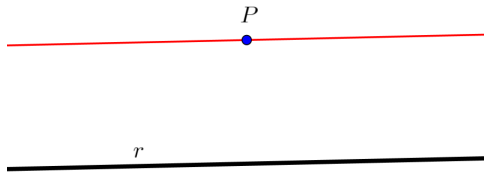


Figura 2. Il V postulato nella formulazione di Playfair (1795)

Da allora in poi molti matematici, e per molti secoli, si occuparono del problema di «dimostrare il V postulato» a partire dagli altri postulati. "Dimostrare un postulato'' è in realtà un'affermazione scorretta: un postulato va assunto, non dimostrato. Ma con questa espressione si intende dire che in realtà si è cercato di dimostrare l'enunciato che nel sistema di Euclide è chiamato «V postulato». Tuttavia, tutti i matematici che hanno voluto fare questo, in realtà hanno voluto riorganizzare la geometria euclidea depennando l'enunciato di questo postulato dalla lista dei postulati per inserirlo in quella delle proposizioni. I vari tentativi possono quindi essere sintetizzati dicendo che il V postulato è in realtà stato sostituito con uno logicamente equivalente. Alcune formulazioni equivalenti al V postulato sono le seguenti:

- Rette parallele ad una stessa retta sono parallele anche tra di loro (Euclide, Prop. I, 30)
- Rette parallele sono equidistanti (Posidonio, I sec. a.C.)
- Esiste almeno un rettangolo (Saccheri, 1733)
- La somma degli angoli interni di un triangolo misura un angolo piatto (Saccheri, Legendre)
- Esiste una coppia di triangoli simili e non congruenti (Saccheri, 1733)
- In un quadrilatero avente due lati uguali e perpendicolari ad un terzo lato gli altri due angoli sono retti (Saccheri, 1733)

- Su una retta finita [un segmento] data è sempre possibile costruire un triangolo simile ad un triangolo dato (Wallis, 1663, poi ripreso da Carnot,1803, e da Legendre,1824).
- Esistono triangoli di area arbitrariamente grande (Gauss, 1799)

Solo nel XIX secolo, attraverso i lavori di Gauss (pubblicati però dopo la sua morte, avvenuta nel 1855), Bolyai, Lobacevskij, Riemann si giunse alla consapevolezza dell'indipendenza dagli altri postulati del postulato dell'unicità della retta parallela a una retta data passante per un punto esterno e alla costruzione di altre geometrie, per le quali non si assume più la validità del V postulato, negandolo (nella geometria iperbolica) oppure depennandolo dalla lista dei postulati (nella geometria ellittica).

Le prime esposizioni pubblicate di una geometria non euclidea furono opera di Nicolai Ivanovic Lobacevskij (1792-1856) e di János Bolyai (1802-1860), che vi arrivarono in modo indipendente l'uno dall'altro. Invece Gauss non pubblicò mai nulla sulla geometria non euclidea perché, scrive in una lettera al padre János Bolyai (pubblicata dopo la morte di Gauss) temeva "gli strilli dei Beoti", ossia dei filosofi kantiani e dei matematici del suo tempo.

Lobacevskij nel 1830 espose la sua nuova geometria che chiamò "immaginaria". János Bolyai nel 1832 espose i suoi risultati nell'appendice di un libro del padre Wolfgang (che lo aveva esortato a non occuparsi di questo problema visti gli sforzi vani da lui stesso compiuti). Egli è più interessato allo studio delle proprietà indipendenti dal V postulato, cioè della "geometria assoluta". Le opere di Lobacevskij e di Bolyai non ebbero immediata risonanza perché i più credettero che prima o poi si sarebbe trovata una qualche contraddizione sfuggita alle indagini fin lì condotte.

Quando si dimostrò che la contraddizione non era ottenibile iniziarono a fiorire tutta una serie notevole di studi. Ma presero corpo anche altre geometrie oltre a quella iperbolica, per esempio la "geometria ellittica" (in cui non vi è alcuna retta parallela, ed infatti in greco "ellisse" vuol dire difetto, mancanza) sviluppata per esempio da Riemann e che richiede

modifiche anche della "geometria neutrale". L'introduzione della geometria ellittica è dovuta al matematico tedesco Bernhard Riemann (1826-1866) che arrivò alla sua formulazione attraverso una visione della geometria profondamente nuova. Il sistema di Riemann è noto come geometria *ellittica*. Per esempio, la costruzione geometrica di Riemann, la geometria ellittica, è caratterizzata dal postulato (detto a volte assioma di Riemann) che afferma che: *tutte le coppie di rette si intersecano*. In tale geometria valgono teoremi quali "La somma degli angoli interni di un triangolo è maggiore di due retti", e vengono a cadere alcune proposizioni della geometria euclidea, come per esempio l'esistenza di rette parallele. La geometria ellittica ha però l'evidente svantaggio, rispetto alla geometria della sfera, che non si può visualizzare in R^3. Infatti il "sostegno" della geometria di Riemann è il piano proiettivo, ossia la sfera in cui si identificano le coppie di punti antipodali sulla superficie. Per avere un modello alternativo, e facilmente visualizzabile, di geometria diversa dalla euclidea risulta invece più facile, soprattutto pensando a un primo approccio degli studenti delle scuole secondarie con tali geometrie, una panoramica delle proprietà della geometria della sfera. Un percorso di questo tipo deve partire dalla conoscenza di alcune proprietà: la superficie della sfera e l'area di un fuso sferico.

3. Modelli di geometria non euclidea

Una svolta nella diffusione delle geometrie non euclidee si ebbe attorno al 1860, dopo la morte di Gauss (1855), con la pubblicazione del suo epistolario che fece conoscere al mondo matematico l'opinione del grande matematico aveva relativamente alle nuove geometrie. Alcune opere di Lobacevskij furono tradotte in francese e anche in italiano attorno al 1860. Diversi matematici furono attirati da questo nuovo settore di ricerca. Nel 1868 il matematico italiano Eugenio Beltrami (1835-1900) presentò, nel suo *Saggio di interpretazione della geometria non euclidea*, quello che viene considerato il primo modello di geometria iperbolica, che fa uso di una superficie detta "pseudosfera", a curvatura negativa.

Nascono poi altri modelli di geometria iperbolica, il modello di Klein e i modelli di Poincaré, oltre al modello di geometria sulla superficie della sfera. Nel 1880 Felix Klein propone un modello di piano iperbolico basato su una conica (per esempio una circonferenza) in cui le corde della circonferenza (senza i punti estremi) diventano le «rette» in questo tipo di modello di piano iperbolico. Questo modello però richiede la modifica anche di altri postulati di Euclide e non solo del V. I modelli più interessanti di geometria iperbolica (in cui la parallela passante per un punto a una retta data non è unica) sono quelli proposti da Poincaré, in particolare il modello del "disco", in cui le "rette" diventano i diametri del cerchio, privati degli estremi, oppure archi di circonferenza ortogonali al cerchio "orizzonte". Tuttavia il modello del "disco" di Poincaré richiede la conoscenza dell'inversione circolare e del concetto di birapporto. Pertanto si presenta meno facilmente proponibile nella scuola secondaria di secondo grado.

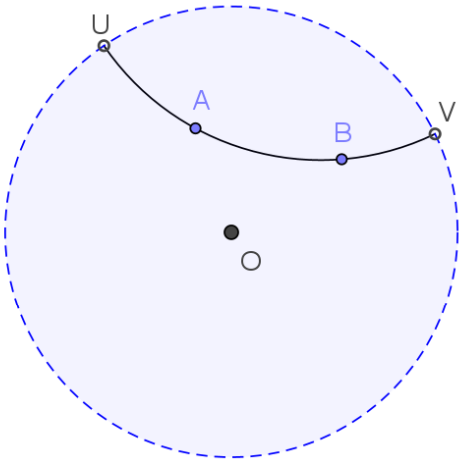


Figura 3. Retta iperbolica *AB* nel "disco" di Poincaré

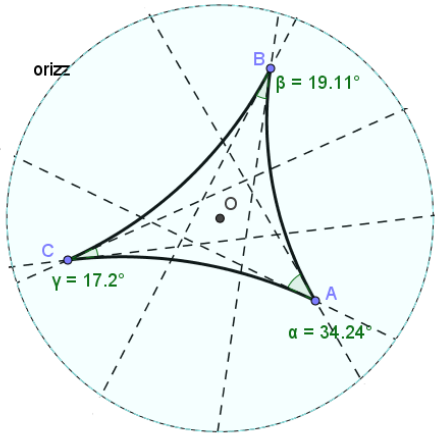


Figura 4. Triangolo iperbolico e somma degli angoli

Il modello del piano iperbolico («disco» di Poincaré). Oggetti e proprietà del piano iperbolico e loro significato euclideo

Oggetti e proprietà del piano iperbolico	**Significato euclideo degli oggetti e delle proprietà**
Punto iperbolico	Punto interno al cerchio di inversione
Retta iperbolica	Un diametro oppure un arco di circonferenza ortogonale al cerchio di inversione
Segmento iperbolico	Un segmento oppure un arco di circonferenza ortogonale dei punti compresi tra A e B
Distanza iperbolica tra due punti iperbolici A e B	$d(A,B) = \lvert ln\, ln\,(ABUV) \rvert$ dove $(ABUV)$ è il birapporto dei punti $ABUV$, con U e V estremi di un diametro o di un arco di circonferenza ortogonale
Ampiezza di un angolo tra due elementi (rette/circonferenze) nel modello di piano iperbolico	Angolo tra le tangenti nel punto di intersezione di due elementi
Congruenza di segmenti	I due oggetti (segmenti o archi di circonferenza ortogonale) hanno lo stesso birapporto con U, V.

Oggetti e proprietà del piano iperbolico	Significato euclideo degli oggetti e delle proprietà
Congruenza di angoli	Gli angoli sono congruenti con il solito significato euclideo

4. Introduzione alla geometria della sfera

Dal punto di vista storico la geometria della sfera ha il vantaggio di fornire un esempio di geometria non euclidea di cui si è dimostrata la coerenza, e questo è avvenuto proprio nel momento in cui ci si è resi conto che è possibile trasporre gli assiomi e i teoremi di questa geometria alla superficie sferica.

Per proporre un percorso didattico sulla sfera si può iniziare dalle proprietà euclidee della superficie sferica, ricordando prima di tutto la formula per determinare la superficie di una sfera. Si propone poi la definizione di fuso e il calcolo della superficie di un fuso sferico.

Per familiarizzare con le proprietà della geometria sferica è necessario introdurre qualche nozione importante, che mette in luce alcune delle differenze con la geometria euclidea del piano. La prima nozione importante è quella di arco geodetico. Dati su una superficie due punti A e B sufficientemente vicini, tra tutti gli archi delle linee della superficie che uniscono i punti, vi sarà almeno un arco che determina il percorso minimo che bisogna compiere su quella superficie per spostarsi dal punto A al punto B. Tali archi di minima distanza sono detti *archi geodetici* della superficie e si dicono *geodetiche* le linee che contengono gli archi geodetici. Sappiamo bene che sul piano gli archi geodetici sono i segmenti, cioè delle linee con curvatura nulla ovunque. È chiaro che anche sulla sfera, per ragioni di simmetria, le geodetiche devono essere linee “dritte”. Esistono però sulla sfera delle linee con curvatura nulla, come accade nel piano? Inoltre, possiamo considerare sulla Terra i paralleli o i meridiani gli analoghi delle rette sul piano?

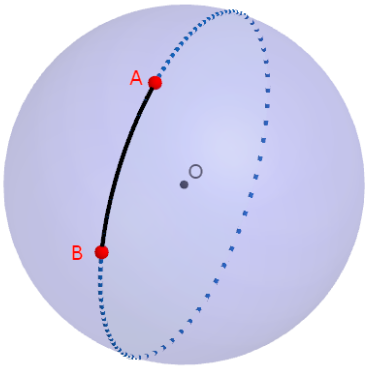


Figura 5. Arco AB di geodetica sulla superficie sferica

Per quanto riguarda gli archi di circonferenza disegnati sulla superficie sferica, possiamo dire che visti dall'esterno, per esempio da una certa distanza dalla sfera, questi archi hanno una curvatura "estrinseca". Invece sulla superficie stessa, per esempio sulla superficie della Terra, hanno una curvatura intrinseca nulla. Per esempio, se con una rotta aerea percorre un tratto di meridiano, tra due aeroporti che hanno la stessa longitudine, possiamo considerare "diritta" questa traiettoria. Si vedrà che le geodetiche della sfera, che hanno curvatura intrinseca nulla e che quindi potremo considerare come le "rette" della geometria sferica, sono archi di cerchi massimi. Se supponiamo che la Terra abbia approssimativamente una forma sferica, tutti i paralleli sulla Terra, eccetto l'equatore, non sono quindi linee geodetiche. Osserviamo anche che mentre nella geometria del piano sono sufficienti due punti per fissare un verso su una retta, questo non vale su una circonferenza, dove sono necessari tre punti. Quindi le "geodetiche" sulla superficie sferica sono le circonferenze massime (di raggio uguale al raggio della sfera).

4.1 Angolo tra due geodetiche e area di un fuso

Due geodetiche si incontrano sempre in due punti antipodali A e A' (figura 6). Il segmento AA' è un diametro della sfera. Possiamo ora definire l'*angolo* α tra due geodetiche in un loro punto di intersezione, per esempio A (figura 6), come l'angolo tra le rispettive rette tangenti tracciate nel punto A alle due

circonferenze massime. Tale angolo α è anche detto angolo del fuso (il minore in figura 6).

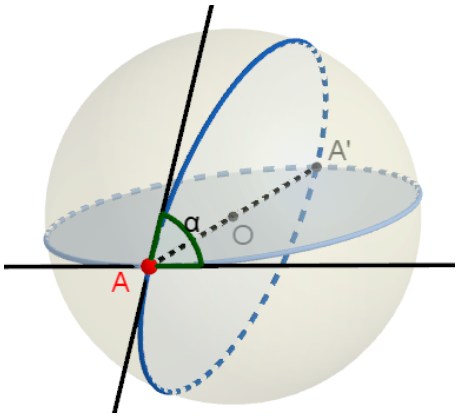


Figura 6 – Angolo tra due geodetiche e fusi

Le due geodetiche suddividono la superficie sferica in quattro regioni, a due a due simmetriche rispetto al diametro AA', dette *fusi* di vertici A e A'. Sia R il raggio della sfera e consideriamo uno dei quattro fusi (per esempio il minore, se non sono tutti uguali) e α l'angolo formato dalle due geodetiche. Se indichiamo con A l'area di questo fuso e con A_s l'area della superficie sferica, si ha la proporzione

$$A : A_s = \alpha : 2\pi$$

$$A : 4\pi R^2 = \alpha : 2\pi$$

L'area di un fuso sferico è quindi data da $A = 2R^2\alpha$. Se $R = 1$, si ha $A = 2\alpha$.

4.2 Il triangolo sferico

Dati due punti A e B non antipodali, per questi due punti passa una (e una sola) circonferenza massima, ossia una geodetica. Basta considerare la curva che si ottiene come intersezione tra la superficie sferica e il piano passante per A e B e per il centro O della sfera. Dei due archi in cui rimane suddivisa la circonferenza massima, consideriamo quello minore di una semicirconferenza e d'ora in poi lo indicheremo sempre con il simbolo $\overset{\frown}{AB}$. Se invece i punti A e B sono antipodali, allora ci sono infinite semicirconferenze massime che congiungono A con B (si pensi ai meridiani

sulla Terra che congiungono il polo N e al polo S). In questo caso $\overset{\frown}{AB}$ indica una delle due semicirconferenze massime.

Ciò premesso, se prendiamo sulla superficie della sfera tre punti A, B e C, tali che non appartengano alla stessa circonferenza massima (in questo modo, due di essi non possono essere diametralmente opposti), consideriamo gli archi geodetici che uniscono a due a due i punti. Questi dividono la superficie della sfera in due parti, una più piccola, che può essere racchiusa in un unico emisfero, e una più grande. Definiamo *triangolo sferico* come la più piccola di queste due superfici (figura 7).

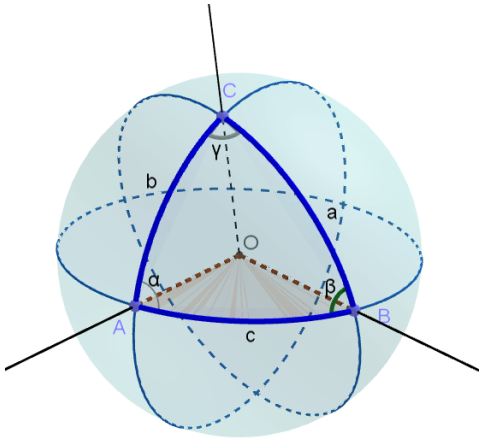


Figura 7. Triangolo sferico ABC

Lo studio completo dei triangoli sferici viene fatto nella Trigonometria sferica, che è di fondamentale importanza per l'astronomia sferica, la nautica e l'aeronautica. Qui ci limitiamo a voler trovare l'area di un triangolo sferico e a studiarne le sue proprietà, perché queste aprono poi la strada alla geometria sulla sfera come modello della geometria non euclidea.

4.3 Relazione tra i lati di un triangolo sferico

Si considerino i tre archi geodetici $\overset{\frown}{AB}, \overset{\frown}{AC}$ e $\overset{\frown}{BC}$ (ciascuno minore di una semicirconferenza). Se A', B', C' sono i punti diametralmente opposti di A, B, C, i tre fusi di vertici AA', BB', CC', che contengono rispettivamente gli archi, $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{AC}$ e $\overset{\frown}{AB}$, sono tali che ogni punto comune a due di essi appartiene anche al terzo. Si chiama *triangolo sferico* ABC l'intersezione dei tre fusi (figura 8). Di questo triangolo si dice angolo $\alpha = \hat{A}$ quello

formato dalle due circonferenze massime uscenti da A e analogamente per gli angoli β e γ. I tre lati $AB^\frown, BC^\frown$ e $CA^\frown$ e gli angoli α, β e γ sono i sei elementi del triangolo sferico.

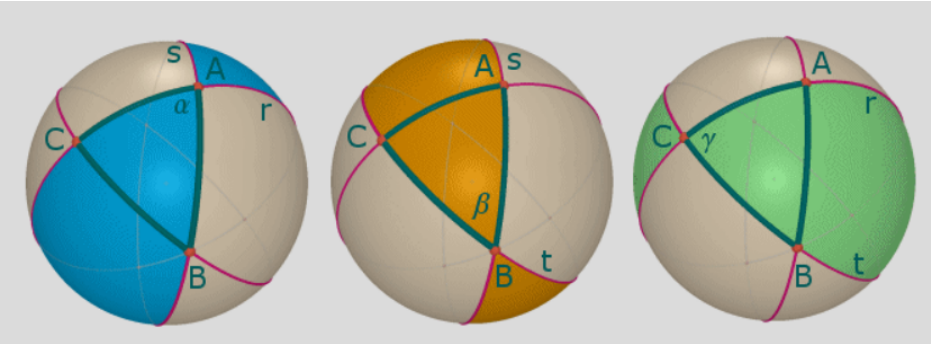


Figura 8. Il triangolo sferico ABC e i tre fusi nei quali è contenuto

Nella figura 7 sono state disegnate anche le semirette OA, OB ed OC che sono gli spigoli di un triedro che si dice essere il corrispondente (e viceversa) del triangolo sferico ABC. Assumiamo che il raggio della sfera sia $R = 1$. Indichiamo con *a, b, c* le misure, in radianti, degli archi opposti ai vertici A, B, C, ossia gli archi $BC^\frown, CA^\frown, AB^\frown$ rispettivamente. Poiché gli archi sono minori di una semicirconferenza, si ha $a < \pi, b < \pi \; e \; c < \pi$.

Per la corrispondenza esistente tra triangoli sferici e triedri, le proprietà dei triedri si traducono subito in proprietà dei lati di un triangolo sferico e quelli del triedro (facce e diedri) in relazioni per i corrispondenti triangoli. In ogni triedro la somma delle facce è minore di 2π e ciascuna faccia è minore della somma delle altre due e maggiore della differenza tra le due rimanenti.

Si ha quindi il seguente

Teorema. *In ogni triangolo sferico:*

la somma dei lati è minore di una circonferenza massima

$$a + b + c < 2\pi$$

ciascun lato è minore della somma degli altri due lati e, quindi, maggiore della loro differenza:

$$a < b + c, \quad b < a + c, \quad c < a + b$$

e supposto $a \leq b \leq c$, *si ha*

$$a > c - b, \quad b > c - a, \quad c > b - a$$

Queste condizioni non sono solo necessarie, ma anche sufficienti perché tre numeri a, b, c (minori ciascuno di π) siano le ampiezze dei lati di un triangolo sferico.

Siamo ora in grado di calcolare l'area di un triangolo sferico. La somma delle aree dei quattro triangoli sferici in figura 9 è la metà della superficie della sfera (con $R = 1$); quindi:

$$A(ABC) + A(AB'C) + A(A'B'C) + A(A'BC) = 2\pi$$

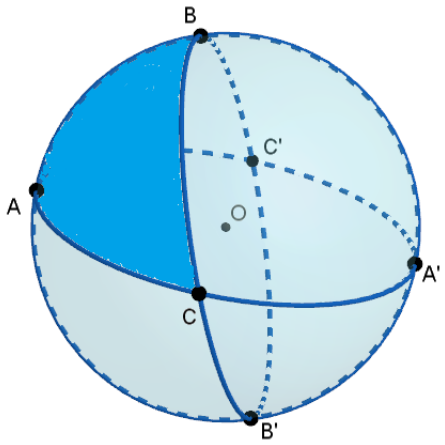


Figura 9. Triangolo sferico ABC

Sostituiamo il triangolo sferico $A'B'C$ con il suo antipodale ABC' (che ha la stessa area) e otteniamo quindi:

$$A(ABC) + A(AB'C) + A(ABC') + A(A'BC) = 2\pi$$

La nuova figura ottenuta è l'unione di tre fusi. L'area dell'unione dei tre fusi è:

$$A\left(F_\alpha \cup F_\beta \cup F_\gamma\right) = 2\pi\,,$$

da cui si ricava (perché il triangolo sferico ABC è contato 2 volte in più)

$$A\left(F_\alpha\right) + A\left(F_\beta\right) + A\left(F_\gamma\right) - 2 \cdot A(ABC) = 2\pi$$

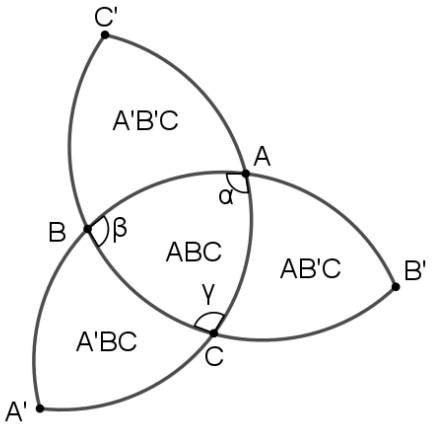


Figura 10. Figura del triangolo sferico ABC proiettata in un piano

Pertanto abbiamo:

$$2\alpha + 2\beta + 2\gamma - 2 \cdot A(ABC) = 2\pi$$

e in definitiva (dividendo per 2)

$$A(ABC) = (\alpha + \beta + \gamma) - \pi$$

detta anche *formula di Girard*. La quantità $(\alpha + \beta + \gamma) - \pi$ si chiama *eccesso sferico*, che è indicato con ε. L'area di un triangolo sferico è quindi data in generale (con R qualsiasi), da

$$A = R^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi) = R^2\varepsilon$$

Quindi su una stessa superficie sferica, l'area di un triangolo sferico è direttamente proporzionale al suo eccesso sferico. Il fattore di proporzionalità (R^2) può essere interpretato come l'area di un triangolo sferico (per es. isoscele e birettangolo) di eccesso unitario, avente due lati uguali alla quarta parte di un cerchio massimo e l'angolo compreso di un radiante).

Quindi la somma degli angoli interni di un triangolo sferico è:

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \frac{A}{R^2}$$

Se il raggio R della sfera tende all'infinito, allora si ha (al limite)

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi,$$

che è il caso della geometria euclidea (ottenuto come caso limite della geometria sulla sfera).

4.4. Triangolo sferico e suo triangolo polare

Al triangolo sferico *ABC* è associato un triangolo, detto *triangolo polare*, definito nel modo seguente. Consideriamo le semirette:

– r_{A_1} perpendicolare al piano individuato da r_B e r_C, situato dalla stessa parte di r_A;

– r_{B_1} perpendicolare al piano individuato da r_A e r_C, situato dalla stessa parte di r_B;

– r_{C_1} perpendicolare al piano individuato da r_A e r_B, situato dalla stessa parte di r_C.

Il triangolo polare (o supplementare) di *ABC* è il triangolo i cui vertici A_1, B_1 e C_1 sono le intersezioni tra le semirette r_{A_1}, r_{B_1} e r_{C_1} e la sfera *S*.

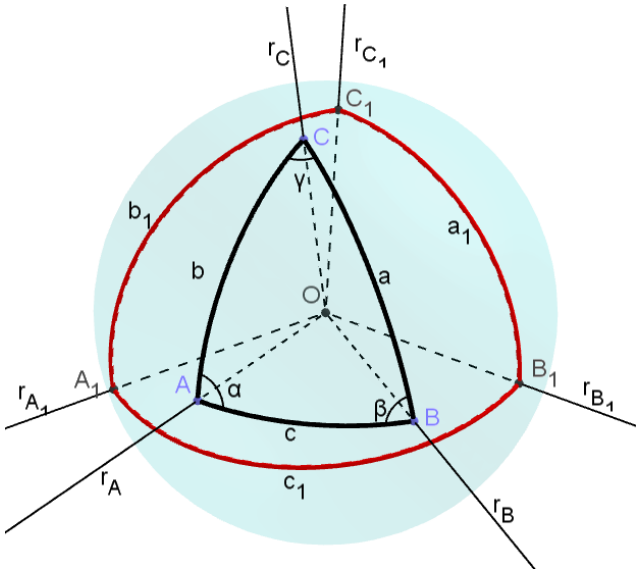


Figura 11. Triangolo sferico *ABC* e triangolo polare $A_1B_1C_1$

Osserviamo che l'angolo $\hat{A}$ di *ABC*, di ampiezza α, coincide con una sezione normale del diedro *OABC*, che ha lo spigolo *OA,* e questa sezione è supplementare della faccia corrispondente B_1OC, del triedro polare $OA_1B_1C_1$, la cui ampiezza è data dallo stesso numero a_1, che misura (in radianti, $R = 1$) il corrispondente lato a_1 di $A_1B_1C_1$. Si ha dunque:

$$\alpha + a_1 = \pi, \quad \beta + b_1 = \pi, \quad \gamma + c_1 = \pi$$

ossia

$$a_1 = \pi - \alpha, \;\; b_1 = \pi - \beta, \quad c_1 = \pi - \gamma$$

Essendo reciproca la relazione tra questi due triangoli, si ha anche

$$a = \pi - \alpha_1, \;\; b = \pi - \beta_1, \qquad c = \pi - \gamma_1$$

ovvero

$$_{\alpha_1} = \pi - a, \;\; \beta_1 = \pi - b, \qquad \gamma_1 = \pi - c$$

Pertanto sussiste il seguente:

Teorema. *In due triangoli tra loro polari, le ampiezze dei lati e degli angoli dell'uno sono supplementari di quelle degli angoli e dei lati dell'altro.*

4.5. Relazione tra gli angoli di un triangolo sferico

Dal paragrafo precedente possiamo ricavare le relazioni tra gli angoli di un triangolo sferico. Nel triangolo polare $A_1B_1C_1$ si ha

$$a_1 + b_1 + c_1 < 2\pi$$

ossia

$$(\pi - \alpha) + (\pi - \beta) + (\pi - \gamma) < 2\pi$$

da cui ricaviamo

$$\alpha + \beta + \gamma > \pi$$

Questa relazione è molto importante e vale in un qualunque triangolo sferico.

D'altronde, dovendo essere minore di π ciascuna delle ampiezze α, β, γ si ha:

$$(\pi - \alpha) + (\pi - \beta) + (\pi - \gamma) > 0$$

Ne segue che in un qualsiasi triangolo sferico si ha anche

$$\alpha + \beta + \gamma < 3\pi$$

In definitiva, in un triangolo sferico per la somma degli angoli valgono le seguenti relazioni:

$$\pi < \alpha + \beta + \gamma < 3\pi$$

Inoltre dalle

$$\{a_1 < b_1 + c_1\ b_1 < a_1 + c_1\ c_1 < a_1 + b_1$$

si ottengono le relazioni

$$\{\pi - \alpha < \pi - \beta + \pi - \gamma\ \pi - \beta < \pi - \gamma + \pi - \alpha\ \pi - \gamma < \pi - \alpha + \pi - \beta$$

dalle quali si ricavano le seguenti relazioni

$$\{\alpha + \pi > \beta + \gamma\ \beta + \pi > \gamma + \alpha\ \gamma + \pi > \alpha + \beta$$

Si conclude che: *affinché tre angoli* α, β, γ *(misurati in radianti) siano gli angoli di un triangolo sferico è necessario e sufficiente che la loro somma sia maggiore di due angoli retti, minore di sei retti, e che ciascuno dei tre angoli aumentato di due retti superi la somma dei due rimanenti.*

4.6. Il triangolo equilatero sulla sfera

Se il triangolo è equilatero è anche equiangolo (figura 12); l'area A in questo caso è data da

$$A = R^2((\alpha + \alpha + \alpha) - \pi) = R^2(3\alpha - \pi)$$

Quindi la somma degli angoli interni di un triangolo equilatero sferico è data da

$$3\alpha = \pi + \frac{A}{R^2}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{3} + \frac{A}{3R^2}$$

Pertanto gli unici triangoli equilateri sferici simili sono quelli congruenti. Ne segue che la somma degli angoli interni di un triangolo equilatero sferico è compresa tra $\pi < 3\alpha < 3\pi$. Pertanto in un triangolo equilatero sferico si ha: $\frac{\pi}{3} < \alpha < \pi$.

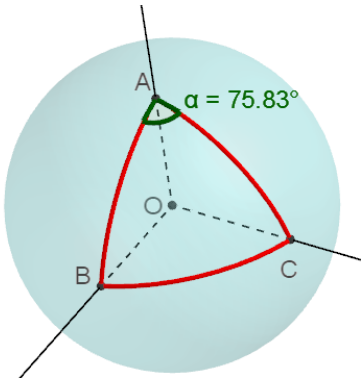


Figura 12. Un triangolo equilatero sulla sfera

Un triangolo sulla sfera può anche essere isoscele, rettangolo (un solo angolo retto), birettangolo o trirettangolo. In quest'ultimo caso il triangolo è anche equilatero e l'area è data da $A = \frac{\pi R^2}{2}$, ossia $\frac{1}{8}$ della superficie della sfera (figura 13).

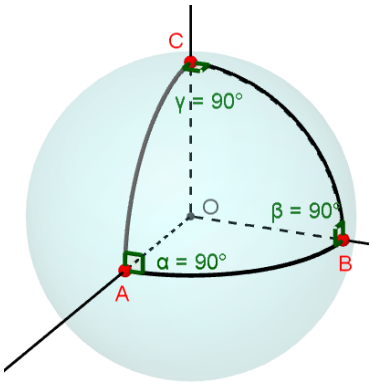


Figura 13. Triangolo equilatero trirettangolo

5. Criteri di congruenza dei triangoli in geometria sferica

Abbiamo visto che l'area di un triangolo sferico dipende dagli angoli e non dai lati. Pertanto due triangoli sferici che abbiamo uguali i corrispondenti angoli, sono congruenti, a differenza della geometria euclidea del piano, dove invece i due triangoli sono simili e non necessariamente congruenti.

Possiamo quindi enunciare il seguente

Teorema. *Due triangoli sferici sono congruenti se hanno ordinatamente uguali:*

– *i tre lati;*

– *due lati e l'angolo compreso;*
– *due angoli e il lato compreso;*
– *i tre angoli.*

Si osserva quindi che su una superficie sferica oltre ai tre tradizionali criteri di congruenza se ne aggiunge un quarto, conseguenza del fatto che due triangoli sferici sono simili, allora sono addirittura congruenti.

6. Il trasporto parallelo

Nei paragrafi precedenti abbiamo visto come risultino fondamentali, per uno studio della geometria della sfera, le nozioni di geodetica e di curvatura e il confronto tra le rette del piano e le geodetiche della sfera. Alle rette è legato strettamente il concetto di parallelismo che, per quanto riguarda il piano, è introdotto da Euclide con la XXIII Definizione che indica come parallele *le rette che non si incontrano se prolungate indefinitamente in entrambe le direzioni.*

Sulla sfera, come abbiamo già osservato, non possono esistere "rette" parallele, poiché ogni coppia di geodetiche distinte si interseca in due punti antipodali. Inoltre sul piano, a differenza che sulla sfera, il concetto di parallelismo comprende anche la nozione di *trasporto parallelo*, che spieghiamo con i seguenti esempi.

È interessante esaminare cosa succede se trasportiamo un'asta (un segmento, o meglio ancora, un vettore), per esempio in senso antiorario, lungo i lati di un triangolo, come illustrato nelle figure 14 e 15. Si osserva che sul triangolo piano dopo un giro l'asta ritorna nella posizione di partenza, mentre ciò non si verifica sul triangolo sferico, dove la posizione finale dell'asta risulta ruotata di un angolo τ rispetto alla posizione iniziale.

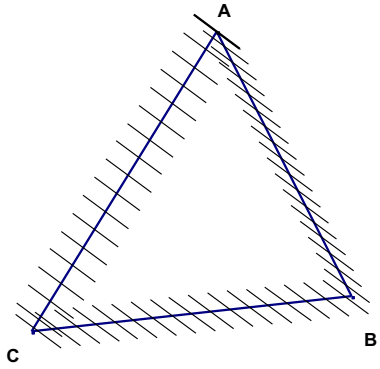


Figura 14. Trasporto parallelo nel piano (triangolo *ABC*)

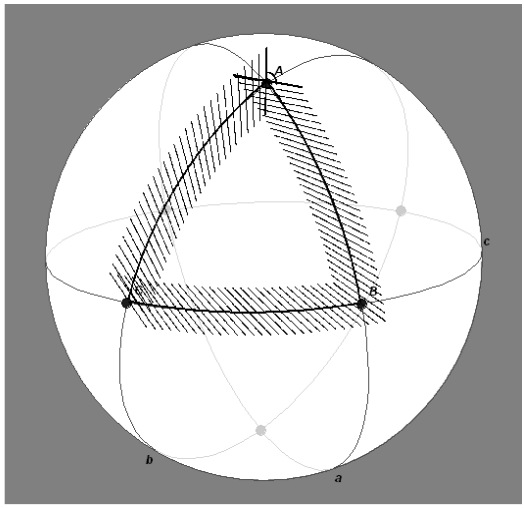


Figura 15**.** Trasporto parallelo sulla sfera (triangolo sferico *ABC*)

Si definisce *olonomia* τ di un triangolo il più piccolo angolo misurato in senso antiorario dalla posizione originale a quella finale di un'asta, quando questa compie un giro in senso antiorario lungo i lati del triangolo, mantenendosi sempre parallela a sé stessa. Come abbiamo detto, in un triangolo piano l'olonomia è nulla, mentre ciò non accade in geometria sferica, come afferma il seguente teorema:

Teorema. *L'olonomia* τ *di un triangolo è uguale a* 2π *meno la somma degli angoli esterni:*

$$\tau = 2\pi - (\alpha' + \beta' + \gamma')$$

Inoltre, dalla tesi del teorema precedente, si ha che l'olonomia di un triangolo sferico è uguale al suo eccesso sferico. Infatti si ha

$$\tau(ABC) = 2\pi - (\pi - \alpha + \pi - \beta + \pi - \gamma) = \alpha + \beta + \gamma - \pi = \varepsilon$$

Da $A(ABC) = R^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi)$, si ottiene più in generale (qualunque sia il raggio R della sfera):

$$\tau(ABC) = \frac{A(ABC)}{R^2}$$

Tale formula, chiamata per i triangoli sferici *formula di Gauss-Bonnet*, permette di ricavare un dato estrinseco della superficie sferica, il raggio *R*, da due dati intrinseci, l'area e l'olonomia del triangolo sferico.

7. Un confronto tra geometria del piano e geometria sulla sfera

Abbiamo visto nei paragrafi precedenti che nella geometria sferica per due punti diametralmente opposti sulla superficie (es. i poli sulla Terra) passano infinite linee geodetiche (per es. i meridiani); due linee geodetiche sono sempre incidenti; la somma degli angoli interni di un triangolo è sempre maggiore di due angoli retti. Gli archi di circonferenze massime conservano la proprietà che è anche delle rette nel piano euclideo, ossia di essere le curve di minima lunghezza tra due punti (geodetiche), e come ogni retta divide il piano in due semipiani, ogni circonferenza massima divide la sfera in due semisfere. Vi sono quindi alcune proprietà che si conservano nel passaggio dalla geometria euclidea piana alla geometria sferica e altre che cessano di valere. Nella Tabella 2 riassumiamo i risultati richiamati in precedenza, mettendo in evidenza le principali analogie e differenze tra le due geometrie.

Tabella 2 – Confronto tra la geometria del piano e la geometria sulla superficie sferica

PIANO	**SFERA**
Il cammino più breve tra due punti è un segmento di retta.	Il cammino più breve tra due punti è un arco di circonferenza massima.
Per due punti passa una e una sola linea geodetica.	Per due punti non antipodali passa una ed una sola linea geodetica. Per due punti antipodali passano infinite linee geodetiche.

Ogni linea geodetica divide il piano in due semipiani.	Ogni linea geodetica divide la sfera in due semisfere.
Dati una linea geodetica e un punto esterno esiste ed è unica la linea geodetica passante per il punto e parallela alla geodetica data.	Dati una linea geodetica e un punto esterno non esiste alcuna linea geodetica passante per il punto e parallela alla geodetica data.
La somma degli angoli interni di un triangolo misura π radianti.	La somma degli angoli interni di un triangolo è maggiore di π radianti (e minore di 3π).
Esistono similitudini con rapporto $k\ (>\ 0)$ arbitrario.	Le uniche similitudini nella geometria sferica sono quelle con rapporto $k\ =\ 1$, ossia le isometrie.

Conclusioni

Abbiamo visto un percorso per arrivare alla geometria della sfera come modello di geometria non euclidea che può essere proposto in un liceo. Questo è anche in accordo con quanto prevede la bozza delle nuove Indicazioni Nazionali di Matematica per i Licei (aprile 2026), laddove per la classe V è scritto: *Ad esempio, ferma restando l'autonomia dei docenti e degli studenti nelle scelte, tra i possibili temi di approfondimento e collegamento interdisciplinare si indicano: qualche teoria assiomatica – come le Geometrie non euclidee, ….*

Bibliografia

F. Enriques, U. Amaldi (1981) *Elementi di geometria,* Parte 2a, Zanichelli, Bologna.

A. Saracco (2025) *Le geometrie oltre Euclide*, Scienza Express, Trieste.

R.J. Trudeau (1991) *La rivoluzione non euclidea*, Bollati Boringhieri, Torino.

SECONDA SESSIONE

MATEMATICA, NATURA E SCIENZE

Q - OMPUTER

Francesco Bevacqua
Opus Lab – Ricerca & Didattica
franescobevacqua169@gmail.com

Sunto- *L'intervento si propone di esplorare il funzionamento dei computer quantistici, una frontiera emergente della tecnologia informatica che promette di rivoluzionare il modo in cui elaboriamo e gestiamo le informazioni. Queste macchine, basate sui principi della meccanica quantistica, operano su qubit anziché su bit tradizionali, consentendo una parallelizzazione delle operazioni senza precedenti e una potenza di calcolo che supera di gran lunga quella dei computer classici. Si presenta, però, una sfida significativa: la necessità di una comprensione dell'hardware e dei principi che ne governano il funzionamento. È fondamentale evitare che i computer quantistici vengano percepiti come delle "Black Box", ovvero come sistemi la cui logica interna e il funzionamento rimangono oscuri e incomprensibili agli utenti (studenti di oggi, professionisti di domani), ed agli sviluppatori. Questa percezione potrebbe portare a una dipendenza da tecnologie la cui operatività non è compresa, con il rischio di applicazioni errate o non etiche. La paura è che possa sorgere, da un utilizzo non consapevole di tali tecnologie, legata alla mancanza di conoscenza dei principi fondamentali che ne regolano il funzionamento, la nascita di una barriera tra il potenziale innovativo di queste macchine e la loro applicazione pratica. Per affrontare questa sfida, è essenziale che i tecnici del domani non solo acquisiscano competenze di base in fisica e fisica quantistica, ma anche in matematica, chimica e informatica con un approccio finalizzato all'Hardware quantistico (ad esempio, una delle tecnologie utilizzata nello sviluppo di queste macchine prevede la manipolazione di ioni intrappolati in campi elettrici). Solo attraverso un approccio interdisciplinare sarà possibile capire meglio questi sistemi complessi. La conoscenza dei qubit, delle porte logiche quantistiche e degli algoritmi specifici richiede una sinergia tra le varie discipline, permettendo di sviluppare una consapevolezza critica e informata sull'impatto e le potenzialità dei computer quantistici. Inoltre, è importante promuovere programmi educativi e di formazione, soprattutto a livello di scuola secondaria di II grado, che incoraggino la comprensione dei fondamenti teorici e pratici di queste tecnologie. Durante l'intervento forniremo i link necessari per scaricare in formato stampabile diversi modelli di computer quantistici.*

Parole chiave: quantistico; computer; quantum, Rydberg, informatica, 3D, scienza

Abstract- *The paper aims to explore how quantum computers work, an emerging frontier of information technology that promises to revolutionize the way we process and manage information. These machines, based on the principles of quantum mechanics, operate on qubits rather than traditional bits, enabling unprecedented parallelization of operations and computing power far beyond that of classical computers. However, they also present a significant challenge: the need to understand the hardware and the principles that govern their operation. It is essential to avoid perceiving quantum computers as "black boxes," that is, systems whose internal logic and functioning remain obscure and incomprehensible to users (today's students, tomorrow's professionals) and developers. This perception could lead to dependence on technologies whose operation is not understood, with the risk of incorrect or unethical applications. The concern is that, through uncritical use of such technologies and a lack of knowledge of the fundamental principles that govern them, a barrier may arise between the innovative potential of these machines and their practical application. To address this challenge, it is essential that future technicians not only acquire basic skills in physics and quantum physics, but also in mathematics, chemistry, and computer science, with an approach focused on quantum hardware (for example, one of the technologies used in developing these machines involves the manipulation of trapped ions in electric fields). Only through an interdisciplinary approach will it be possible to better understand these complex systems. Knowledge of qubits, quantum logic gates, and specific algorithms requires synergy among different disciplines, making it possible to develop a critical and informed awareness of the impact and potential of quantum computers. In addition, it is important to promote educational and training programs, especially at the upper secondary school level, that encourage understanding of the theoretical and practical foundations of these technologies. During the presentation, we will provide the necessary links to download printable models of various quantum computers.*

Keywords: quantum; computer; 3D, Rydberg, computing, science

1. Introduzione

I computer quantistici rappresentano una delle innovazioni più affascinanti dell'informatica moderna. A differenza dei computer tradizionali, che elaborano informazioni utilizzando *bit,* questi si uniscono seconda del numero rappresentato, e possono assumere la forma 11011 o 01101 (sono rispettivamente i numeri 27 e 13). I computer quantistici, invece, sfruttano i principi della meccanica quantistica per rappresentare ed elaborare l'informazione in modo profondamente diverso.

Questa differenza non è solo tecnica, ma concettuale: mentre un computer classico esegue operazioni su stati ben definiti (lo stato, nel caso dei bit classici, può essere pensato come rappresentato da 0 e 1). Un computer quantistico lavora con *qubit*, unità di informazione che possono trovarsi in una combinazione di stati (vedremo a breve cosa si intende per combinazione). È proprio questa proprietà a rendere possibile un tipo di calcolo molto più potente per alcune classi di problemi. Ma cominciamo ad introdurre qualche chiarimento in merito a questa nuova classe di "oggetti".

2. Bit

Nel calcolo classico, il bit è l'unità fondamentale dell'informazione. Ogni bit può valere solo 0 o 1. La rappresentazione del numero cambia come abbiamo precedentemente ricordato. Tutti i programmi, dai fogli di calcolo ai videogiochi, sono costruiti su sequenze di bit del tipo descritto. Il computer utilizza le porte logiche per manipolare i numeri (ma anche le lettere) espressi in formato binario. Procederemo con un semplice esempio, sommando due numeri usando la somma definita in aritmetica. Successivamente trasformeremo i due numeri in notazione binaria e li sommeremo utilizzando le porte logiche. I due numeri che prenderemo ad esempio sono il numero cinque ed il numero otto:

Somma algebrica:
5 + 8 = 13

Trasformazione in notazione binaria del numero 5:
5 ÷ 2 = 2 resto 1
2 ÷ 2 = 1 resto 0
1 ÷ 2 = 0 resto 1
Leggendo i resti dal basso verso l'alto otteniamo:
5 = 101 (in binario)

Trasformazione in notazione binaria del numero 8:
8 ÷ 2 = 4 resto 0

4 ÷ 2 = 2 resto 0
2 ÷ 2 = 1 resto 0
1 ÷ 2 = 0 resto 1
Leggendo i resti dal basso verso l'alto otteniamo:
8 = 1000 (in binario)

Passiamo adesso alla somma dei due numeri:

$$\begin{array}{r} 0101 \\ +1000 \\ \hline 1101 \end{array}$$

Da notare che per poter allineare correttamente i due numeri per la somma, abbiamo aggiunto uno zero al numero 5. Infatti il numero 5 in binario è 101(3 bit). Aggiungendo uno zero diventa 0101 (4 bit). Aggiungere zeri a sinistra della rappresentazione binaria del numero non ne cambia il valore (05 è sempre 5). L'operazione ne facilita però l'allineamento. Il valore aggiunto si chiama zero di riempimento).

In conclusione:
8 + 5 = 13 = 1101 (in binario)
Vediamo adesso come viene eseguita la somma da un computer utilizzando le porte logiche. La somma binaria di due bit si realizza con un half adder o con un full adder, a seconda di come si vuole considerare il riporto. Riportiamo i calcoli solo per il primo metodo. Le porte principali coinvolte sono le seguenti: XOR, AND e OR. Applichiamo i due metodi.

Metodo della mezza addizione (half adder)

Somma: $S = A \oplus B$

Riporto: $C = A \wedge B$

Ricordando che:
La porta XOR restituisce 1 solo se i due ingressi sono diversi
La porta AND restituisce 1 solo se entrambi gli ingressi sono 1

Costruiamo la tabella:

Bit	A	B	C_{in}	S	C_{out}
0	1	0	0	1	0
1	0	0	0	0	0
2	1	0	0	1	0
3	0	1	0	1	0

Tabella per il calcolo della somma 8 + 5

Il risultato lo troviamo sulla colonna S, letto dal basso verso l'alto.

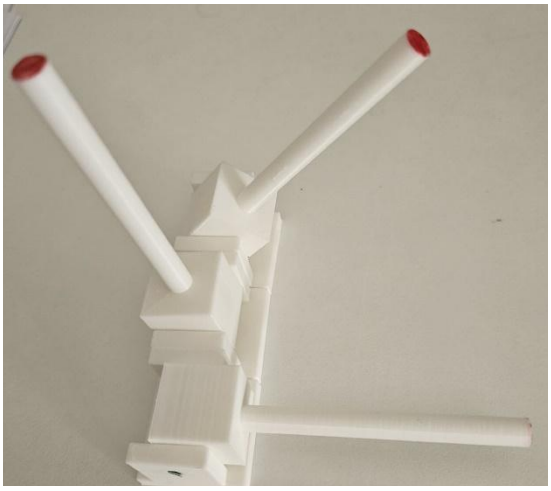
Processo di somma binaria 5 + 8 = 13

Interpretazione dello schema precedente:
Gli ingressi sono due numeri da sommare in binario
Il sommatore a 4 bit elabora i bit uno alla volta
Il riporto finale $C_{out} = 0$ perché il risultato 1101 entra ancora in 4 bit

3. Qbit

Se è facile comprendere (e manipolare) i bit classici, è un po' più complesso immaginare (e di conseguenza manipolare), i qbit. I bit classici si possono trovare solo ed esclusivamente in uno dei due stati (0 e 1) mai in entrambi. I qbit, invece, si trovano in una condizione di sovrapposizione degli stati 0 e 1. Per descrivere questa nuova situazione utilizziamo delle semplici astine che possono essere sistemate in posizione verticale o orizzontale. Queste sono stampate con la stampante 3D (i file possono essere

richiesti all'autore). Possiamo immaginare che le nostre astine possono assumere una posizione qualsiasi compresa tra la verticale (stato 0) e l'orizzontale (stato 1).



Le astine per modellizzare le rappresentazioni dei qbit

Questa straordinaria caratteristica dei qbit ci porta ad introdurre il concetto nuovo di *parallelismo quantistico*. Questo si differenzia dal concetto classico di parallelismo di funzionamento dei processori. Infatti, si usano già configurazioni in parallelo di processori (o computer) per eseguire in maniera più rapida calcoli che richiederebbero grandi quantità di tempo.

Il concetto di parallelismo quantistico verrà chiarito in seguito. Un esempio semplice di parallelismo classico è quello del progetto SETI. L'acronimo sta per *Search for Extra-Terrestrial Intelligence* ed è un insieme di progetti scientifici dedicati alla ricerca di intelligenze extraterrestri; il suo obiettivo principale è individuare segnali provenienti dallo spazio che possano indicare la presenza di civiltà tecnologicamente evolute, non semplicemente di forme di vita generiche.

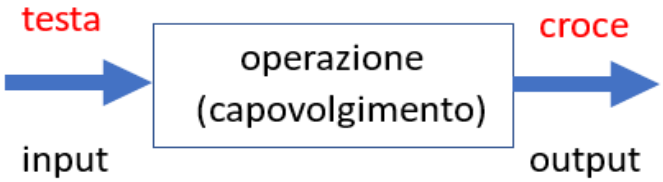
Per farlo, i ricercatori analizzano soprattutto onde radio, ma anche altri possibili segnali come impulsi laser, usando radiotelescopi molto sensibili e strumenti informatici capaci di esaminare enormi quantità di dati. Per analizzare queste quantità di dati, si utilizza una rete di computer che li analizzano in "parallelo". Il SETI ha creato un software che permette a

chiunque di diventare un nodo di questa rete e partecipare al progetto di ricerca (https://seti.berkeley.edu/participate/).

Nel paragrafo precedente abbiamo detto di immaginare i bit come oggetti che possono assumere due stati soltanto. Per descrivere questa situazione abbiamo usato dei semplici oggetti stampati con la stampante 3D. Questi possono essere messi in verticale (stato 0), o orizzontale (stato 1) Vedi la figura precedente.

La meccanica quantistica aggiunge un nuovo significato al concetto di calcolo parallelo. Proviamo a fare un esempio: immaginiamo adesso un bit classico come una moneta. In questo esempio lo stato 0 è individuato dal lato "testa", mentre il lo stato 1 è individuato dal lato "croce".

Se poggiamo la moneta sul tavolo con, ad esempio, il lato "testa" in altro, l'unica operazione che possiamo fare è quella di girare la moneta ed ottenere il lato "croce". Vale ovviamente anche il viceversa. Se schematizziamo il problema otteniamo:



Operazione "classica" ad un bit

È evidente che non potremmo mai girare la moneta contemporaneamente (eseguire l'operazione di capovolgimento), per i due stati 0 e 1. Nel mondo quantistico le regole cambiano: poiché la moneta può trovarsi in una sovrapposizione di stati, diventa possibile eseguire, ad esempio, un'operazione che ha come input lo stato 0 e 1 contemporaneamente. Gli stati di input crescono molto rapidamente all'aumentare dei qbit (esattamente in maniera esponenziale). Allo stesso modo aumenta la potenza dei calcolatori quantistici, dando la possibilità di eseguire calcoli con un numero di input (stati) simultanei inaccessibile ai computer classici.

Se ricordate la storia del Faraone che giocava a scacchi con il suo servo, avrete un'idea quantitativa della potenza di un calcolatore quantistico. Un

calcolatore quantistico a 64 bit potrebbe eseguire calcoli, in pochi secondi, che per i supercomputer attuali richiederebbero tempi di esecuzione confrontabili con l'età dell'universo.

A questo punto dobbiamo fermarci un attimo a riflettere. Sembra tutto semplice così presentato ma non dimentichiamo che ci troviamo nel mondo quantistico. In questo strano mondo il risultato di una misura corrispondente ad interrogare il computer per avere l'output alla nostra domanda, è probabilistico.

Questo si traduce in soldoni, ad avere un output (risposta al nostro input) con un suo valore di probabilità.

La potenza del calcolo quantistico ci permette di eseguire un'infinità di calcoli in parallelo ma risposte con un certo grado di certezza proprio perché soggette ai postulati della meccanica quantistica.

Attualmente il focus di schiere di scienziati e tecnici è puntato sullo sviluppo di algoritmi che permettano di sfruttare appieno le capacità del calcolo quantistico combinato con la possibilità di ottenere in maniera esatta la risposta che cerchiamo

4. Algoritmi quantistici

Abbiamo già esempi di algoritmi ottimizzati per risolvere problemi specifici come quello proposto dal fisico Peter Shor nel 1994, per risolvere un problema, all'apparenza di scarsa importanza pratica come la fattorizzazione dei numeri interi. Per i dettagli rimandiamo al libro "Il Computer impossibile" citato in bibliografia. Il problema è posto dai matematici in questi termini: dato un numero N trovare i numeri p e q il cui prodotto da N, con p e q numeri primi. Noto solo N, il problema si complica esponenzialmente, infatti all'aumentare del numero N (e dei bit necessari per rappresentarlo), questo aumenta allo stesso modo (esponenzialmente), Di conseguenza aumenta anche il numero di porte logiche (o transistor) necessarie per il calcolo. Per trovare i numeri primi che moltiplicati danno 15 come risultato (3 e 5), il calcolo è relativamente semplice. La fattorizzazione di un numero di 250 cifre (si rappresenta con 829 bit),

richiede ai supercomputer attuali un tempo di circa 2700 anni per trovare la soluzione. Se le cifre diventano 300 allora ci vorrebbe 1.000.000 (un milione) di anni per trovare la soluzione.

Potrebbe sembrare un problema puramente teorico se non fosse per il fatto che questi calcoli sono intimamente legati al problema delle procedure di crittografia digitale dei dati che viaggiano in rete. Tutti i software che utilizziamo quotidianamente impiegano tecniche di questo tipo per "nascondere" i messaggi che inviamo (compresi i numeri delle carte di credito). Sui social il problema è di minore importanza, ma pensate alle transazioni on line, ai messaggi scambiati da enti "sensibili", come apparati militari o aziende che operano nel campo delle tecnologie avanzate.

Una macchina quantistica, per la sua potenza di calcolo, sarebbe in grado di mettere in difficoltà la sicurezza di qualsiasi informazione criptata.

Altro algoritmo quantistico importante è quello trovato nel 1996 dall'informatico indiano Lov Krumar Grover. Questo algoritmo permette la estrazione di informazioni all'interno di database non indicizzati. Un esempio per capire. Immaginiamo di avere un elenco telefonico con 1.000.000 (un milione) di numeri di telefono ed i corrispettivi utenti. Se ogni ricerca richiedesse 1 secondo, ci vorrebbero nell'ipotesi peggiore, 1.000.000 di secondi (circa 12 giorni) per trovare il risultato (combinazione numero – utente). Utilizzando l'algoritmo di Groover, il tempo si riduce a 1.000 (mille) secondi (poco più di un quarto d'ora). Più aumenta il database, più l'algoritmo diventa efficiente. Se il nostro elenco telefonico contenesse un miliardo di numeri, la ricerca con metodi classici richiederebbe 31 anni, l'algoritmo di Groover impiegherebbe solo 8 ore.

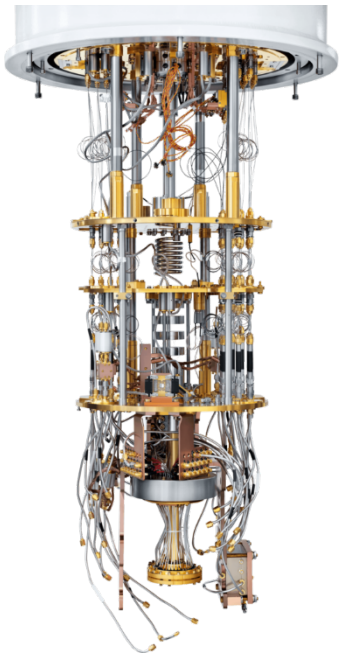
5. Hardware quantistici

Il problema principale per lo sviluppo di computer quantistici è quello di "immaginare" un hardware che funzioni secondo i principi della meccanica quantistica. La risposta non è eccessivamente complicata: Poiché i fenomeni quantistici si evidenziano a scale molto piccole (dell'ordine della costante di Planck, ($6{,}62607015 \times 10^{-34}$), allora i qbit devono necessariamente

“vivere” in quell’ordine di grandezza. Gli atomi si prestano benissimo a questo scopo. Detto questo bisogna capire quale tecnologia mettere in gioco per poter manipolare i singoli atomi. Vedremo a seguire quali tecnologie vengono utilizzate ad oggi.

Ma non basta controllare ogni singolo qbit, bisogna anche mantenerli in condizioni di “operatività quantistica”. Questo significa che devono trovarsi, per poter essere utilizzati, in stati “entanglement” (intrecciati). Quando due o più qubit sono entangled, il loro stato non può essere descritto separatamente: il sistema deve essere considerato come un tutto unico. I qbit sono utili al calcolo quantistico se si trovano in questo particolare stato. Ma torniamo agli atomi. Uno di questo può rappresentare un qbit, se ad esempio, si può trovare in due stati diversi (livelli orbitali). Quando l’atomo si trova in uno (e solo in uno) di questo due stati, deve essere totalmente isolato dal resto dell’universo ma soprattutto deve possedere alcune caratteristiche come la stabilità (mantenere quello stato per un tempo sufficiente) e la riproducibilità (quest’ultima per costruire sistemi a più di 1 qbit). Ricordiamo tutti dalle lezioni di chimica che gli atomi sono per loro natura identici. Questo a patto che fenomeni esterni (ad esempio un campo magnetico), non ne altera le caratteristiche.

Una delle tecnologie in uso attualmente per costruire i computer quantistici utilizza i “qbit superconduttivi”. Questo sono dei veri e propri atomi “artificiali”, creati su circuiti stampati sulla scala micrometrica (un millesimo di millimetro). La sfida ingegneristica diventa quella di realizzare questo “atomi artificiali” tutti uguali tra di loro. Altro problema è quello di inizializzarli tutti allo stesso modo, ad esempi allo stato iniziale 0. Ricordando che gli atomi sono soggetti al fenomeno dell’agitazione termica, un singolo qbit può facilmente spostarsi da uno stato ad un altro. Ecco allora la necessità di “raffreddare” i computer quantistici quasi allo zero assoluto (-273,15 ^{0}C).



Modello di computer quantistico (Wikipedia)

Il “candeliere” caratterizza alcune famiglie di computer quantistici in realtà è un criostato a diluizione, un refrigeratore che mantiene i qbit abbastanza stabili per evitare il fenomeno della cosiddetta “decoerenza” (perdita delle proprietà quantistiche). Ovviamente non finisce qui. Bisogna adesso trovare un set di porte logiche “quantistiche”. Queste, come nell’informatica classica, sono necessarie per costruire le operazioni necessarie per l’esecuzione corretta degli algoritmi.

La realizzazione di queste prevede l’utilizzo di una tecnologia mai utilizzata prima; ad esempio dei laser i cui impulsi siano sufficiente potenti per manipolare un atomo ma nello stesso tempo di potenza controllata in modo tale il chip “quantistico” non si surriscaldi.

La tecnologia, per meglio capire, è simile a quella che si utilizza sulle macchine a guida autonoma. Queste devono ottimizzare il percorso, evitando ingorghi, traffico ecc.. Nel nostro caso devono calcolare la giusta potenza del laser utilizzato nella porta logica attiva in modo da portare gli atomi-qbit allo stato desiderato. La naturale direzione di questa ricerca guarda alla Intelligenza Artificiale che in questo modo diventa parte integrante del computer quantistico.

Affrontiamo brevemente il problema della lettura del risultato dell'operazione eseguita dal computer quantistico. Questo a livello quantistico è un problema che richiede una tecnologia *ad hoc* per non distruggere il risultato dell'operazione. Un esempio chiarirà meglio. Se il nostro computer quantistico utilizza degli ioni (ovvero atomi con carica elettrica nota), come qbit, come facciamo a sapere se si trova nello stato 0 o 1? Possiamo immaginare una soluzione di questo tipo: possiamo irradiare lo ione con un laser di frequenza precisa; se questo si trova nello stato 1, il laser lo porterà al livello successivo, da questo livello si avrà un decadimento con conseguente emissione di un fotone. Il fotone è luce che può essere rivelata con una particolare fotocamera.

Se invece si trova nello stato 0 non accadrà nulla. Questa cosa incredibile (ma tecnologicamente fattibile), rivela la natura delicata della misurazione nel mondo quantistico.

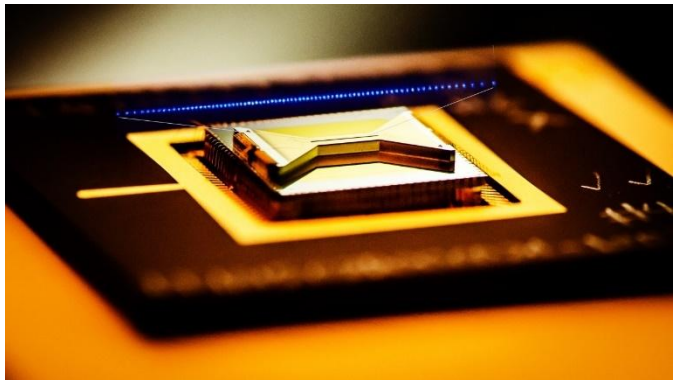
Ultimo problema che affronteremo riguarda il tempo in cui il sistema deve mantenere la natura quantistica. Se questo è inferiore a quello necessario per eseguire il calcolo, non otterremo il risultato voluto. La decoerenza, cioè la perdita delle proprietà quantistiche, deve avvenire in un tempo maggiore a quello necessario per eseguire il calcolo. Vediamo adesso quali sono le linee di ricerca più interessanti per definire l'architettura del computer quantistico.

6. Tecnologia a ioni intrappolati

Questa tecnologia nasce da un'idea del fisico teorico Peter Zoller e da un suo collaboratore nel 1995. Durante una conferenza di Fisica Atomica, i due proposero un modello di computer quantistico che utilizzasse ioni (atomi elettricamente carichi). La loro proposta ha gettato le basi teoriche per l'elaborazione dell'informazione quantistica. La loro idea ha anche portato alla realizzazione di una porta logica quantistica la CNOT (controlled – NOT).

Questo sistema utilizza gli stati interni di due ioni (detti *qbit control* e *qbit target*) ed il movimento vibrazionale per generare *entanglement*.

In estrema sintesi, coordinando impulsi laser, si possono realizzare le porte logiche necessarie per eseguire i calcoli. Il problema del funzionamento si sposta, quindi, sul controllo degli impulsi laser necessari.



Modello di chip a ioni intrappolati (Credits: Chris Monroe, IonQ, physicsworld.com)

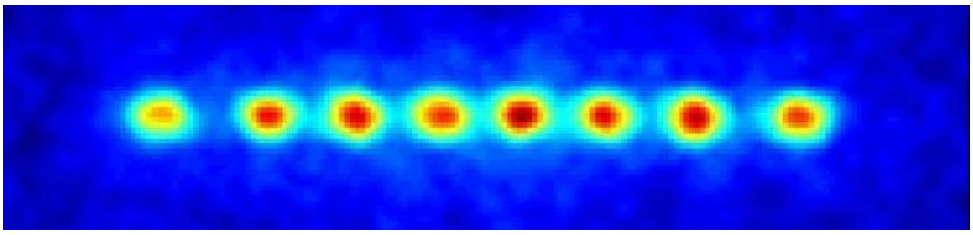
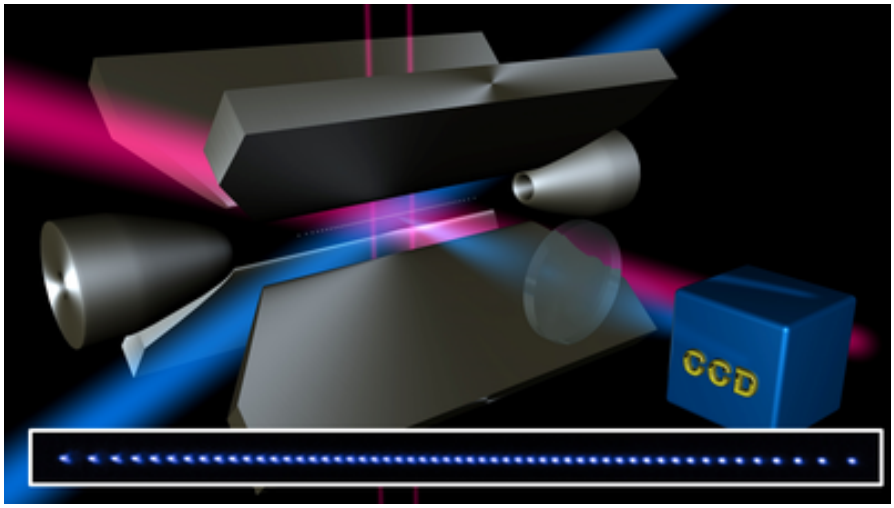


Immagine di ioni intrappolati (Credits: quantumoptics.at)



Struttura di un computer quantistico a ioni intrappolati (Credits: Rainer Blatt)

Nello specifico vengono utilizzati due orbitali dell'atomo di calcio. Con un laser si eccita l'atomo e il suo stato varia di conseguenza, ovvero un suo

elettrone passa da un orbitale all'altro, portando il nostro bit atomico in uno stato di 0 o 1.

Come dicevamo prima, la potenza del calcolo quantistico si ottiene solo quando si sfruttano alcune proprietà quantistiche, come l'entanglement. Occorre quindi fare un passaggio ulteriore e accoppiare tra loro almeno due qubit. Grazie a uno stratagemma inventato da Zoller e Cirac.

Questo sfrutta i moti di oscillazione degli ioni, per costruire un gate a 2 qubit (il cosiddetto Cirac-Zoller gate), ovvero far parlare due qubit, per permettere l'operazione logica necessaria a tutto il calcolo quantistico.

La misura dello stato del sistema viene fatta mettendo in risonanza uno dei due livelli del qubit con un altro che decade molto velocemente. Quando un atomo eccitato decade emette un fotone, luce. Con delle telecamere apposite si vedono gli ioni emettere o non emettere luce e questo codifica l'informazione in stati di 0 e 1, acceso e spento.

Le aziende che stanno attualmente sviluppando questa tecnologia sono:

Quantinuum: che ha sviluppato la serie di processori H1, H2 ed Helios.

ionQ: che ha sviluppato la serie di processori IonQ, Harmony, ionQ Aria e IonQ Forte.

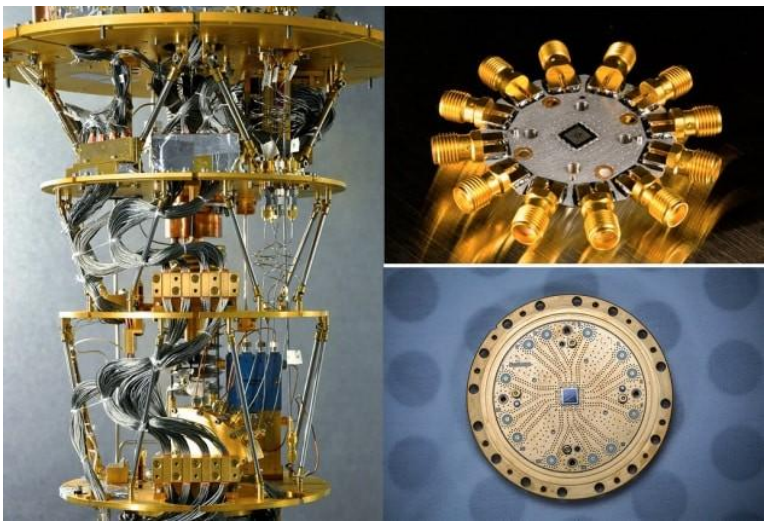
AOT (Alpine Quantum Technologies: Azienda europea che produce il processore a ioni intrappolati PINE.

7. Computer quantistici a superconduttori

Nei materiali superconduttori, al di sotto di una certa temperatura, non sono più gli elettroni che determinano il passaggio della corrente ma le cosiddette coppie di Cooper. Queste sono coppie di elettroni che, superando la naturale repulsione, determinano il passaggio della corrente. Questo è il fenomeno alla base della superconduttività. La tecnologia basata sui semiconduttori è diversa da quella descritta precedentemente. In questo caso, anziché utilizzare atomi reali, si realizzano circuiti che si comportano come atomi artificiali. Questi hanno un comportamento quantistico come gli atomi reali. Si realizzano quindi dei circuiti formati da materiali superconduttori. Sulla superficie di questi vengono realizzate delle sezioni

dette “Cooper Pair box” dove le coppie di Cooper possono entrare in maniera controllata. Il qbit, in questo caso è caratterizzato dalla presenza (o assenza) di una coppia di Cooper in questa “scatola”. Attraverso impulsi elettrici è possibile gestire le coppie di Cooper, creando le condizioni tipiche di funzionamento dei qbit.

Google sta sviluppando la tecnologia dei computer quantistici seguendo questa strada. Il chip realizzato, *Sycamore*, contiene 53 qbit (erano 54 ma uno è risultato difettoso). Con questa tecnologia Google nel 2019 ha annunciato la “supremazia quantistica”. Questa condizione prevede l’esecuzione di un calcolo impossibile per i computer tradizionali.



Costituenti di un computer quantistico a superconduttività

Le principali aziende che sviluppano computer quantistici a superconduttività sono:

IBM Quantum: tra i leader storici del settore, con processori superconduttivi accessibili anche via cloud.

Google Quantum AI: sviluppa chip superconduttivi ed è nota per la ricerca sulla “quantum supremacy”.

Rigetti Computing: startup specializzata in processori quantistici superconduttivi.

D-Wave: usa tecnologie superconduttive, anche se orientata soprattutto al quantum annealing.

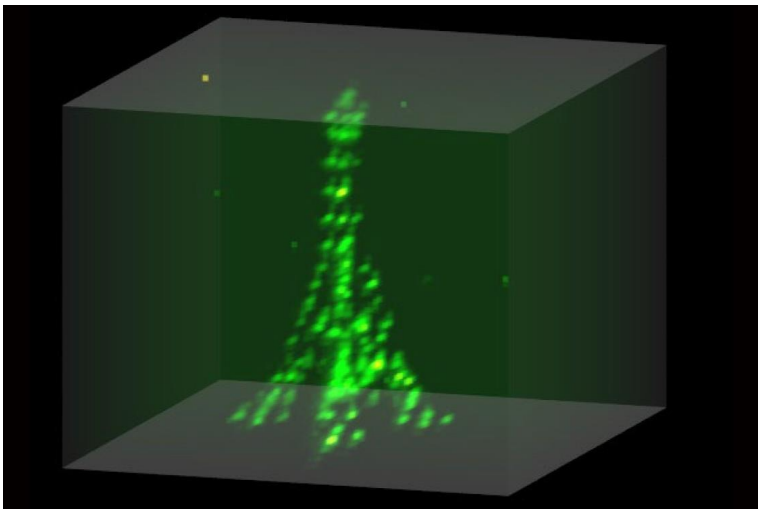
Intel: investe nella ricerca su hardware quantistico, inclusi dispositivi superconduttivi e tecnologie correlate.

Alice & Bob: azienda francese che lavora su qubit superconduttivi con architetture avanzate per la correzione degli errori.

IQM Quantum Computers: società europea attiva nello sviluppo di hardware quantistico, inclusi sistemi superconduttivi.

8. Atomi di Rydberg

Questa nuova tecnologia prevede l'utilizzo di atomi neutri, privi quindi di carica elettrica. In condizioni di operatività questi vengono portati in condizione di eccitazione estrema, fino a farli diventare, appunto, "atomi di Rydberg". La tecnologia prende il nome da Johannes Rydberg. Questo fisico, a cavallo tra la fine dell'Ottocento e gli inizi del Novecento, studiò le condizioni di atomi i cui elettroni venivano spostati su orbite molto lontane dal nucleo. Questi conservano tutte le condizioni quantistiche utili allo scopo ma sono molto più grandi di quelli utilizzati nelle tecnologie prima discusse. La loro condizione permette, grazie a degli strumenti chiamati "pinzette ottiche", di essere manipolati facilmente. La figura seguente da un'idea della precisione che si può raggiungere nel manipolare gli atomi di Rydberg.



Atomi di Rydberg in configurazione Torre Eiffel

Società più note che lavorano su tecnologie quantistiche basate su atomi di Rydberg sono:

QuEra Computing: tra le aziende leader nell'uso di **atomi neutri** e stati di Rydberg per il calcolo quantistico.

Pasqal: sviluppa computer quantistici a **atomi neutri**, sfruttando interazioni Rydberg.

Atom Computing: lavora con **atomi neutri** per il quantum computing; l'approccio è molto vicino alle architetture Rydberg.

Infleqtion(ex ColdQuanta): coinvolta in piattaforme quantistiche basate su atomi neutri e tecnologie atomiche avanzate, incluse dinamiche Rydberg.

9. Conclusioni

Siamo all'inizio di un nuovo percorso. Attualmente migliaia di fisici, ingegneri, ricercatori, chimici, in migliaia di laboratori sparsi in tutto il Mondo stanno convergendo verso un obiettivo comune: trasformare i principi della meccanica quantistica, da lungamente considerati principalmente oggetto di indagine di base, in una piattaforma computazionale capace di ridefinire i limiti dell'elaborazione dell'informazione.

Le prospettive delineate sommariamente in questo articolo mostrano con chiarezza come la sovrapposizione di stati e l'entanglement non siano soltanto curiosità concettuali, ma risorse operative essenziali, la cui gestione richiede una formalizzazione rigorosa e una straordinaria precisione sperimentale. In tale quadro, i sistemi basati su atomi di Rydberg offrono un'interessante combinazione di interazioni a lungo raggio, scalabilità e controllabilità, rendendoli candidati promettenti per l'implementazione di porte logiche performanti. L'architettura a ioni intrappolati costituisce un paradigma maturo, nel quale tempi di coerenza elevati, manipolazione coerente mediante laser e un controllo accurato degli stati interni consentono di esplorare algoritmi quantistici con una notevole accuratezza.

Le tecnologie legate alla superconduttività, dal canto loro, hanno compiuto progressi impressionanti grazie alla tecnica di microfabbricazione

avanzata, all'integrazione su chip e alla possibilità di ingegnerizzare circuiti non lineari con parametri altamente regolabili, aprendo la strada a processori quantistici di dimensioni crescenti e a strategie di correzione degli errori sempre più sofisticate. Nonostante tali risultati, permane un insieme di sfide teoriche e ingegneristiche tutt'altro che marginali: la decoerenza, la calibrazione dei controlli, la connettività limitata, la validazione della supremazia computazionale in compiti di reale interesse matematico e la costruzione di codici di correzione degli errori efficienti e fisicamente implementabili.

Da un punto di vista strettamente matematico, il problema centrale non è soltanto aumentare il numero di qubit, ma anche gestire la dinamica dei canali quantistici, la complessità algoritmica e le condizioni sotto le quali un vantaggio quantistico diviene reale, verificabile e riproducibile. In conclusione, i computer quantistici non rappresentano più una mera ipotesi speculativa, bensì un campo di ricerca in rapida maturazione, nel quale la teoria e l'esperimento si sostengono reciprocamente; la loro realizzazione piena dipenderà dalla capacità di coniugare controllo fisico, analisi matematica e ingegneria dell'informazione in un quadro coerente, aprendo così una nuova stagione per la scienza del calcolo.

10. Piccolo glossario quantistico

Sovrapposizione (di stati). La sovrapposizione è uno dei concetti chiave del calcolo quantistico. In un sistema quantistico, una particella può esistere in più stati contemporaneamente fino al momento in cui viene osservata o misurata. Per un computer quantistico, questo significa che un insieme di qubit può rappresentare molte configurazioni diverse nello stesso momento. Con n qubit, il sistema può descrivere 2^n combinazioni possibili. Questa crescita esponenziale è uno dei motivi per cui si parla di grande potenziale computazionale. Tuttavia, è importante chiarire un punto: non si tratta di "provare tutte le soluzioni in parallelo" in modo diretto e automatico. Il vero vantaggio emerge solo quando l'algoritmo quantistico è progettato per sfruttare correttamente interferenza e misurazione.

Interferenza quantistica. Un altro principio fondamentale è l'interferenza. Come accade nelle onde, anche gli stati quantistici possono sommarsi o annullarsi tra loro. I computer quantistici usano questo effetto per aumentare la probabilità di ottenere risposte corrette e ridurre quella delle risposte sbagliate. In altre parole, un algoritmo quantistico non si limita a esplorare molte possibilità: organizza l'evoluzione degli stati in modo che le soluzioni desiderate risultino più probabili al momento della misura finale. Questo rende il calcolo quantistico molto diverso da quello classico. Non è il numero di possibilità rappresentate a garantire il vantaggio, ma la capacità di manipolare le ampiezze quantistiche in modo intelligente.

Entanglement. Tra i fenomeni più sorprendenti della fisica quantistica c'è l'entanglement, o intreccio quantistico. Quando due o più qubit sono entangled, il loro stato non può essere descritto separatamente: il sistema deve essere considerato come un tutto unico. Questa correlazione quantistica permette di costruire operazioni molto più ricche rispetto ai bit classici. L'entanglement è spesso uno degli ingredienti essenziali degli algoritmi quantistici più efficienti, perché consente relazioni tra qubit che non hanno equivalenti diretti nel calcolo tradizionale.

Misurazione e collasso dello stato. Un aspetto cruciale del calcolo quantistico è la misurazione. Quando un qubit viene misurato, la sovrapposizione si perde e il qubit restituisce un risultato classico. Questo fenomeno è noto come collasso dello stato. Di conseguenza, un algoritmo quantistico deve essere costruito con estrema attenzione: una misurazione troppo precoce può distruggere l'informazione utile contenuta nel sistema. Per questo motivo, i computer quantistici non funzionano semplicemente come computer classici più veloci. Richiedono una logica di programmazione diversa, basata sulla preparazione del sistema, sulla manipolazione degli stati e sulla misurazione finale.

Porte quantistiche e circuiti. Così come i computer classici usano porte logiche come AND, OR e NOT, i computer quantistici utilizzano porte quantistiche. Queste operazioni trasformano gli stati dei qubit in modo controllato. Le porte quantistiche sono organizzate in circuiti quantistici,

sequenze di operazioni che preparano il sistema a produrre un certo risultato. Alcune porte agiscono su un solo qubit, altre su più qubit e possono generare entanglement. Il calcolo quantistico può quindi essere immaginato come un flusso di trasformazioni fisiche su stati quantistici, più che come una semplice esecuzione di istruzioni simboliche.

Coerenza e decoerenza quantistica. È la proprietà di un sistema quantistico di mantenere relazioni di fase ben definite tra i suoi stati, permettendo fenomeni come sovrapposizione e interferenza. È fondamentale per il comportamento tipicamente non classico delle particelle e per il funzionamento di tecnologie come i computer quantistici. La decoerenza quantistica, invece, è il processo attraverso cui un sistema perde queste relazioni di fase a causa dell'interazione con l'ambiente, trasformando progressivamente il comportamento quantistico in uno più classico. In breve, la coerenza consente effetti quantistici, mentre la decoerenza li indebolisce o li distrugge.

Qiskit. È un framework open source sviluppato da IBM per la programmazione di computer quantistici. Permette di creare, simulare ed eseguire circuiti quantistici usando istruzioni scritte in Python. Con Qiskit è possibile rappresentare qubit, applicare porte logiche quantistiche, eseguire misurazioni e analizzare i risultati. È uno strumento molto usato per studiare algoritmi quantistici, testare esperimenti su simulatori e, quando disponibile, su veri processori quantistici. Qiskit non è un linguaggio completamente separato, ma una libreria che estende Python per lavorare con il calcolo quantistico in modo accessibile e pratico.

```
from qiskit import QuantumCircuit, transpile
from qiskit_aer import AerSimulator

# Creo un circuito quantistico con 2 qubit e 2 bit classici
qc = QuantumCircuit(2, 2)

# Applico una porta Hadamard al primo qubit
qc.h(0)

# Creo una correlazione tra i due qubit con una porta CNOT
qc.cx(0, 1)

# Misuro i qubit
qc.measure([0, 1], [0, 1])
```

```
# Simulatore
simulator = AerSimulator()

# Compilo ed eseguo il circuito
compiled_circuit = transpile(qc, simulator)
result = simulator.run(compiled_circuit).result()

# Mostro i risultati
counts = result.get_counts()
print(counts)
```

Esempio di codice in Qiskit

Bibliografia

V. Sisini, F. Sisini (2019) *Reti neurali non supervisionate*, Scuola_Sisini, Torrazza Piemonte.

F. Sisini (2018) *Introduzione alle reti neurali*, Scuola_Sisini, Torrazza Piemonte.

V. Sisini, F. Sisini (2019) *Informatica Quantistica*, Scuola_Sisini, Torrazza Piemonte.

R. Bertram (1986) *Il Computer che pensa*, Franco Muzzio Editore, Varese.

A.D. Aczelo (2022) *Entanglement*, Raffaello Cortina Editore, Varese.

G. Beneti, G. Casati, S. Montangero (2025) *Il Computer impossibile*, Raffaello Cortina Editore, Varese

Dal problema del doppio strato all'equazione della brachistocrona

Loredana Biacino
Già professore associato presso il Dipartimento "R. Caccioppoli" dell'Università di Napoli "Federico II"
loredana.biacino2@unina.it

Sunto- *Scopo della relazione è compiere un percorso interdisciplinare coinvolgendo semplici nozioni di cinematica, di geometria e di calcolo delle variazioni, anche con la possibilità della lettura di alcuni passi tratti da articoli di Johann e Jakob Bernoulli. Si parte con la legge della rifrazione della luce ottenendo in base al principio di minimo la legge del doppio strato o legge di Snell, che si può stabilire o usando il metodo di Fermat dei massimi e minimi, metodo di tipo intuitivo che può essere proposto già in una terza o quarta superiore, o utilizzando il calcolo differenziale. Il problema nasce quando di strati ce ne sono più di due di densità via via crescente. Si analizza prima il caso di un numero finito di strati, mantenendosi ad un livello elementare, nel qual caso il raggio di luce descrive una spezzata. Successivamente si passa ad un numero infinito di strati infinitesimali, passaggio che può essere ancora effettuato in modo a tratti intuitivo a tratti riferendosi a elementari nozioni del calcolo differenziale. Quale curva sarà allora descritta dal raggio di luce? Accanto a questo problema si pone e si risolve il problema equivalente della brachistocrona, dopo aver brevemente definito la cicloide, determinandone l'equazione.*

Parole chiave: Velocità della luce, principio di minimo, risoluzione dei triangoli, derivata, integrali curvilinei.

Abstract- *The aim of this paper is to carry out an interdisciplinary exploration involving elementary notions of kinematics, geometry, and the calculus of variations, including the possibility of directly reading selected passages from articles by Johann and Jakob Bernoulli. We begin with the law of refraction of light, obtaining Snell's law (the law of the double layer) from the minimum principle. This can be established either by using Fermat's intuitive method of maxima and minima—suitable even for students in the third or fourth year of high school—or by employing differential calculus. A difficulty arises when the medium consists of more than two layers with progressively increasing density. We first analyze the case of a finite number of layers, keeping the discussion at an elementary level; in this situation, the light ray follows a broken line. We then move on to an infinite number of infinitesimal layers, a transition that can still be carried out partly intuitively and partly by referring to basic notions of differential*

calculus. What curve, then, will the light ray describe? Alongside this question, we introduce and solve the equivalent problem of the brachistochrone, after briefly defining the cycloid and determining its equation.

Keywords: Speed of light, minimum principle, triangle solving, derivative, line integrals.

1. Prologo

Sugli *Acta Eruditorum* del 1696, Johann Bernoulli lancia la sfida del problema della brachistocrona. Egli si rivolge ai più importanti matematici dell'epoca proponendo loro di determinare la traiettoria lungo la quale un grave scivola da un punto A ad un punto B nel più breve tempo possibile. Bernoulli aggiunge che questa curva non è una retta, ma una curva ben nota ai geometri ed egli rivelerà tale curva se nessuno ci riuscirà entro l'anno. Bernoulli corrisponde direttamente con Leibniz riguardo a tale problema. E Leibniz lo risolve lo stesso giorno in cui ne viene messo al corrente. Nel numero di febbraio del 1697 degli *Acta Eruditorum* esce la risposta di Bernoulli: egli prova che la curva richiesta è la cicloide, fornendone una brillante dimostrazione e afferma che il problema può essere risolto solo con il nascente calcolo infinitesimale: per questo motivo Galileo, che pure aveva formulato bene il problema aveva però dato la soluzione non corretta del cerchio nel suo Dialogo dei Massimi Sistemi. Nel numero di maggio del 1697 esce la soluzione di Jakob Bernoulli che accusa il fratello minore Johann di aver usato le sue stesse scoperte, rivelate sin dall'ottobre precedente agli amici, per risolvere il problema. È l'inizio della famosa rivalità dei due fratelli. Nello stesso anno 1697 vennero pubblicate sugli *Acta Eruditorum* anche le soluzioni del Marchese de L'Hospital e di un anonimo, che aveva pubblicato la soluzione su una rivista inglese. L'anonimo era Isaac Newton dalla lontana Inghilterra e Johann Bernoulli osservò che aveva riconosciuto il leone dalla sua unghiata. Tutti questi interventi dei massimi cultori del nascente calcolo infinitesimale simboleggiano l'importanza della questione: oltre a ribadire la insostituibile capacità del nuovo calcolo nel risolvere problemi, si gettavano, nello scontro

tra questi portentosi ingegni, le fondamenta del calcolo delle variazioni, una nuova branca della matematica.

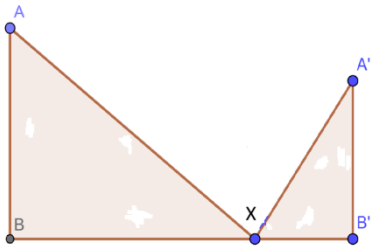
Nella presente relazione si cercherà di riportare la dimostrazione dei fratelli Bernoulli, cercando di trattare i punti salienti in modo attuale e rigoroso, ma anche facendo appello all'intuizione. Si parte con la legge della rifrazione della luce: è ben noto che per stabilirla Fermat ricorre al principio per cui per spostarsi da un mezzo ad un altro di diversa densità la luce percorre il cammino che le permette di impiegare il minimo tempo. Si ottiene una condizione necessaria e sufficiente, la così detta legge del doppio strato o legge di Snell. Questa legge si può stabilire o utilizzando il calcolo differenziale o usando il metodo di Fermat dei massimi e minimi, metodo di tipo intuitivo che può essere proposto già in una terza o quarta superiore. Qui, comunque, per poterla utilizzare nei paragrafi successivi, generalizziamo lievemente la questione, partendo dal seguente problema di minimo:

Data una retta BB', due punti A e A' fuori di essa e due numeri positivi a e a', determinare un punto X su BB' in modo che sia minima la somma aAX+a'A'X .

Si determina che esiste il punto X che realizza il minimo e soddisfa la condizione:

$$a\cos AXB = a'\cos B'XA' \qquad (1)$$

sia nel caso che i due punti A e A' si trovino da bande opposte rispetto a BB', sia che si trovino dalla stessa banda.



Una dimostrazione si può ottenere al seguente modo: dati i punti A e A' siano B e B' le loro proiezioni ortogonali sulla retta BB' e sia BB'=*b*, AB

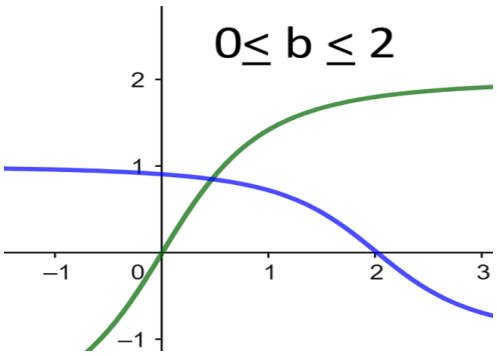
=A'B' =c. Sia X il punto di BB' per cui la somma aAX+a'XA' è minima. Allora, posto AX =x, XA'=b-x deve essere minima la quantità

$$T(x)= a\sqrt{x^2 + c^2} + a'\sqrt{(b - x)^2 + c^2}.$$

Per calcolare il minimo di T(x) introduciamo la derivata $T'(x)= \frac{ax}{\sqrt{x^2+c^2}} - \frac{a'(b-x)}{\sqrt{(b-x)^2+c^2}}$. Si verifica che esiste un unico punto $\underline{x}\in]0, b[$, tale che $T'(\underline{x})=0$.

Poniamo a tal fine $f(x) = \frac{ax}{\sqrt{x^2+c^2}}$, $g(x) = \frac{a'(b-x)}{\sqrt{(b-x)^2+c^2}}$ Studiamo le due funzioni $f(x)$ e $g(x)$. Risulta:

$f'(x) = \frac{ac^2}{\sqrt{(x^2+c^2)^3}} >0$; $g'(x) = -\frac{a'c^2}{\sqrt{((b-x)^2+c^2)^3}} <0$. Ne segue che $f(x)$ cresce strettamente nell'intervallo $[0, b]$ partendo dal valore 0 assunto in 0, mentre $g(x)$ decresce raggiungendo in b il valore 0. Quindi i diagrammi di $f(x)$ e di $g(x)$ si incontrano in un solo punto $\underline{x}\in]0, b[$, che è l'unico zero di $T(x)$.



Essendo $T''(x) >0$ in tutti i punti di $[0, b]$, ne segue che $\underline{x}\in]0, b[$ è l'unico punto di minimo. Il punto $\underline{x}$ è caratterizzato dal fatto che corrispondentemente ad esso risulta $a$cosAXB =a'cosB'XA', cioè sussiste la (1). Da tale eguaglianza si ricavano immediatamente la legge della riflessione e la legge della rifrazione della luce.

Nel caso BB' sia uno specchio tale che sia A' il punto da cui si vede un raggio riflesso partito da A, si tratta di determinare il punto X tale che sia minima la somma AX+XA' e si applica il precedente risultato con a =a', ottenendo cos AXB = cos B'XA', cioè il punto X cercato deve essere tale

che, considerata la retta *s* perpendicolare a BB' in X, raggio incidente e raggio riflesso devono formare angoli eguali con *s*.

Nel caso che BB' rappresenti una superficie che separa due mezzi di diversa densità in cui la luce ha due velocità diverse, *u* e *v,* si tratta di minimizzare il tempo che impiega un raggio di luce partito da A a raggiungere il punto A'. In tal caso si ricorda che dalla relazione $v=\frac{s}{t}$, che lega spazio, tempo e velocità in un moto uniforme, si trae $t = \frac{s}{v}$. Quindi, se XA' è il raggio rifratto di AX, il punto X deve essere tale che $\frac{AX}{u} + \frac{XA'}{v}$ sia minimo. Quindi anche in questo caso si applica il precedente risultato con $a= \frac{1}{u}$, $a'= \frac{1}{v}$, si ottiene pertanto la regola di Snell, secondo la quale, detti *i* ed *r* gli angoli incidente e rifratto risulta: $\frac{seni}{u} = \frac{senr}{v}$. Per questo problema si può anche consultare [Ambrosetti 2009, Appendice A].

2. Il metodo dei massimi e minimi di Fermat

Nella prima metà del 1600 Fermat elaborò un metodo per la ricerca dei massimi e minimi, che può essere portato anche in una terza o quarta classe di una scuola secondaria e che è un ottimo argomento per introdurre successivamente il calcolo dei limiti e il calcolo differenziale. Fermat osservava che se una funzione definita in intervallo presenta internamente a questo un punto *x* cui corrisponde un massimo o un minimo allora, considerato un punto vicino a *x*, sia $x+E$, non solo la differenza $f(x+E)-f(x)$ è prossima a zero, ma anche il rapporto $\frac{f(x+E)-f(x)}{E}$ è molto vicino a zero. Per cui aveva dedotto un metodo per la ricerca dei massimi e minimi consistente nei seguenti passi.

Si costruisce il rapporto $\frac{f(x+E)-f(x)}{E}$; si eseguono tutte le semplificazioni possibili in modo da eliminare *E* dal denominatore; si pone $E=0$ nella relazione ottenuta; si eguaglia a zero l'espressione ormai priva di *E* e si calcolano i valori della *x* che l'annullano; i corrispondenti valori $f(x)$ rappresentano i minimi o i massimi della funzione.

Esempio 1 - Si consideri la funzione $y=1-7x+2x^2$.

Costruiamo il rapporto $\frac{1-7(x+E)+2(x+E)^2-(1-7x+2x^2)}{E}$;

effettuiamo le semplificazioni ottenendo: $-7+4x+2E$.

Poniamo $E=0$ ed eguagliamo a zero: $-7+4x=0$, da cui ricaviamo $x=\frac{7}{4}$. Calcoliamo $f(\frac{7}{4}) = -\frac{41}{8}$; si verifica che si tratta di un valore minimo, è l'ordinata del vertice della parabola assegnata.

Esempio 2 – È dato un segmento AB di lunghezza a. Determinare su di esso un punto C tale che il rettangolo di lati AC e CB abbia area massima.

Posto AC $=x$, l'area del rettangolo è data da $f(x)=x(a-x)$.

Costruiamo il rapporto $\frac{(x+E)(a-x-E)-x(a-x)}{E}$.

Effettuando le semplificazioni e eguagliando a zero: $a-2x-E=0$. Ponendo $E=0$ si ha: $x=\frac{a}{2}$. Pertanto, il rettangolo di area massima è il quadrato. Osserviamo che per $x=0$ e per $x=a$ l'area è 0, quindi minima: tali valori non sono interni all'intervallo [0, a] di definizione e quindi il metodo non li ha rilevati.

Esempio 3 – Determinare il minimo della funzione: $T(x)=\frac{\sqrt{x^2+c^2}}{u}+\frac{\sqrt{(b-x)^2+c^2}}{v}$. In questo caso Fermat segue un metodo lievemente diverso. Considera due punti x_1 e x_2 vicini al richiesto punto di minimo x, con $x_1 < x < x_2$ e osserva che ce ne sono sempre due prossimi quanto si vuole, per cui non solo si ha che $T(x_1)=T(x_2)$, ma anche $T(x_1)-T(x_2)$ diviso per x_1-x_2 e' molto prossimo a zero se x_1 e x_2 sono molto vicini. Sostituendo e semplificando si ottiene:

$$T(x_1)-T(x_2) = \frac{x_1^2-x_2^2}{u(\sqrt{x_1^2+c^2}+\sqrt{x_2^2+c^2})}+\frac{x_1^2-x_2^2-2b(x_1-x_2)}{v(\sqrt{(b-x_1)^2+c^2}+\sqrt{(b-x_2)^2+c^2}}.$$

Dividiamo per x_1-x_2, e poniamo eguale a 0, ottenendo:

$$\frac{x_1+x_2}{u(\sqrt{x_1^2+c^2}+\sqrt{x_2^2+c^2})}+\frac{x_1+x_2-2b}{v(\sqrt{(b-x_1)^2+c^2}+\sqrt{(b-x_2)^2+c^2}}.=0$$

Infine poniamo $x_1 = x_2 = x$

$$\frac{x}{u\sqrt{x^2+c^2}} = \frac{b-x}{v\sqrt{(b-x)^2+c^2}}.$$

Da cui si trae $\frac{seni}{u} = \frac{senr}{v}$, dove i ed r rappresentano rispettivamente l'angolo di incidenza e l'angolo di rifrazione.

Il metodo fu molto applicato dopo Fermat, ma riscosse anche molte critiche in quanto viola il principio di non contraddizione. Il numero variabile E è in un primo tempo supposto diverso da zero e alla fine posto eguale a zero. Per questo motivo Fermat non parla di eguaglianze nei vari passaggi, ma di adeguaglianze, volendo con ciò' intendere che si tratta di espressioni solo approssimativamente eguali se E è molto piccola e solo in ultimo passa all'eguaglianza, quando E è supposta talmente piccola da poter essere trascurata.

3. Dal doppio strato al multistrato

Premettiamo la seguente

Proposizione – Dati due punti A e A′ e una retta s: siano B e B' le proiezioni di A e di A′ su s. Si divida BB' in due parti eguali mediante il punto P. Per tale punto si consideri un segmento perpendicolare a BB', PM, e siano z e z' le lunghezze dei segmenti AM e MA'. Allora, dati i numeri F>0 e F'>0, la somma Fz+F'z' è minima quando:

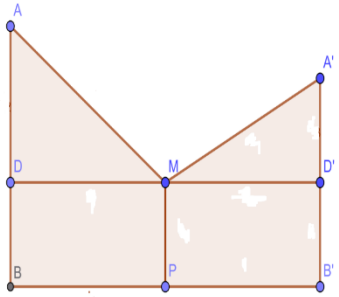
$$F\frac{BP}{z} = F'\frac{PB'}{z'}. \qquad (2)$$

Dim. Sia DD' la parallela a BB' condotta per M, con B e B' proiezioni ortogonali di D e D': per quanto detto in precedenza la data somma è minima quando: *F*cosDMA = *F'*cos D'MA'.

Ora DM=AMcosDMA; MD' =MA'cosD'MA', da cui:

$$F\frac{DM}{AM} = F', \frac{MD'}{MA'},$$

che coincide con la (2).



In base alla precedente Proposizione possiamo allora scrivere la soluzione del Problema del multistrato.

Siano dati due punti A e A' e una retta s: siano B e B' le proiezioni di A e di A' su s. Si divida BB' in parti eguali mediante i punti P, P', P", ... per tali punti si considerino i seguenti segmenti perpendicolari a BB': PM, P'M', P"M", ... e siano z, z', z", ... le lunghezze dei segmenti AM, MM', M'M", ... Allora, dati i numeri positivi F, F', F", ... il minimo di

$$Fz + F'z' + F"z" + \dots , \qquad (3)$$

si ottiene quando:

$$F\frac{BP}{AM} = F'\frac{PP'}{MM'} = F"\frac{P'P"}{M'M"} = \cdots \qquad (4)$$

Si osservi che nel caso che sia $F = F' = F" = \dots$ la condizione (4) comporta che la soluzione sia evidentemente la retta AA'. In generale, tenendo presente quanto detto a proposito della legge di rifrazione della luce, la risoluzione dei precedenti problemi è richiesta quando si studia la deviazione di un raggio di luce nel passaggio da un punto ad un altro in un mezzo non uniformemente denso, ma costituito da più strati paralleli sovrapposti. Il primo che trattò in modo soddisfacente dal punto di vista matematico la questione fu Fermat che nella prima metà del Seicento dimostrò la legge di rifrazione della luce. A sua volta Johan Bernoulli negli *Acta Eruditorum* del 1697 a pag. 208 osserva che se concepiamo il mezzo non uniformemente denso, ma costituito da infinite lamelle orizzontali sovrapposte, costituite di materia diafana di densità crescente o decrescente, allora un raggio di luce non si propagherà da un punto all'altro del mezzo in

linea retta, ma descriverà una curva in modo che percorrendola impiegherà il minor tempo possibile. Ora Johan Bernoulli suppone che, abbandonando il caso della propagazione della luce, si passi in generale al limite nella (4) facendo tendere a zero la lunghezza comune dei segmenti che hanno per estremi due punti P consecutivi. In tal caso in luogo delle quantità *F,* che nel caso della propagazione della luce rappresenta l'inverso della velocità della luce variabile da strato a strato, avremo una funzione positiva assegnata *F*(*x)*; la poligonale AMM'M" ... tende ad una curva ɣ di equazione *y*=*y*(*x*) da determinarsi; la somma (3) tende all'integrale curvilineo da minimizzare

$$(\gamma)\ F(y(x))dz \qquad (5)$$

essendo $dz = \sqrt{dx^2 + dy^2}$; la condizione (4) necessaria per il minimo diventa $F\frac{dx}{dz}$ =cost. o anche $\frac{dz}{dx} = cF$ da cui traiamo, elevando al quadrato,

$$1+y'^2 = c^2 F^2 . \qquad (6)$$

Da quanto precede troviamo subito la soluzione dei seguenti problemi:

Dati due punti A= (a, b) e B= (c, d) nel piano trovare la curva di equazione y =y(x), con y(x) funzione continua con la sua derivata prima nell'intervallo [a, c], che li congiunge e che realizza la minima distanza tra A e B.

Consideriamo l'insieme di tutte le curve ɣ grafici di funzioni *y*=*y*(*x*) continue con la loro derivata prima nell'intervallo [*a, c*] e tali che *y*(*a*)=*b* e *y*(*c*)=*d*. È ben noto che la lunghezza di una ɣ di tale insieme è data dalla (5), con la funzione F coincidente con la costante 1. La (6) si riduce a *y*'=costante =*c* e quindi la soluzione del problema di minimo posto è ovviamente la retta di equazione *y* = *cx* + *b*, dove *c* e *b* si determinano imponendo il passaggio per A e B.

Dato il punto T = (t, s), si consideri la classe delle curve passanti per T di equazione y=y(x), con y(x) definita e continua con la sua derivata prima per x>t. La curva ɣ di tale classe per cui è minimo l'integrale (6) con F(x)= $\sqrt{\frac{x}{x-t}}$ *ha equazione y² =4t(x-t).*

La condizione (6) diventa:

$$y' = \sqrt{\frac{t}{x-t}}.$$

La curva che realizza il minimo, quindi, definita per $x>t$, è data da:

$$y(x) = \int_t^x \sqrt{\frac{t}{u-t}}\,du = 2\sqrt{t(x-t)};$$

ovvero

$$y^2=4t(x-t)$$

e rappresenta la traiettoria dei proiettili.

4. Il caso della brachistocrona.

Dalle precedenti considerazioni si può ora trarre idea per la soluzione del seguente importante problema:

Dati due punti A e A' in un piano verticale, trovare la curva AMA' tale che un punto materiale che si muova su tale curva partendo da A con velocità iniziale nulla e soggetto alla sola forza peso raggiunga A' nel minor tempo possibile[1].

Questo problema fu proposto da Johan Bernoulli nel 1696 sugli *Acta Eruditorum* (p. 269). Come già' detto furono proposte varie soluzioni, pubblicate sugli *Acta Eruditorum* dell'anno successivo. Seguiremo il metodo fornito dallo stesso Johan Bernoulli e da lui esposto sugli *Acta Eruditorum* del 1697 (p. 206) con una metodologia lievemente più moderna, aggiungendo qualche spiegazione che nel suo testo non è data. Consideriamo la classe di tutte le curve di equazione $y=y(x)$ che congiungono l'origine delle coordinate O= (0, 0) con un punto P(a, b) con ($b<0$) e che sono continue con la derivata prima nell'intervallo [0, a]. Abbiamo bisogno di conoscere la velocità di un punto in caduta libera su una di tali curve: essa è data, in base al bilancio energetico, da $v(x)=\sqrt{2gy(x)}$, infatti l'energia statica del punto è data dal prodotto del suo peso, mg, essendo m la massa e g l'accelerazione di gravità, e dalla sua altezza, data da $y(x)$; l'energia cinetica è invece data da $\frac{1}{2}mv^2$, essendo v la

[1] *Problema novum ad cujus solutionem Mathcmatici invitantur. Datis in plano verticali duobus punctis A & B , assignare Mobili M, viam AMB, per quam gravitate sua descendens moveri incipiens a puncto A, brevissimo tempore perveniat ad alterum puntum B* [Bernoulli, Acta Eruditorum 1696, p. 269].

velocità del punto. Per il bilancio energetico ad ogni istante energia statica ed energia cinetica debbono coincidere da cui si trae l'espressione della velocità: v(x) = $\sqrt{2gy(x)}$.

Ne deduciamo che il tempo impiegato dal punto per passare da O a P scendendo lungo la curva ɣ, tempo che vogliamo minimizzare, è dato da

$$(\gamma)\int_0^a \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}dx = \frac{1}{\sqrt{2g}}\ (\gamma)\int_0^a \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}\,dx. \qquad (7)$$

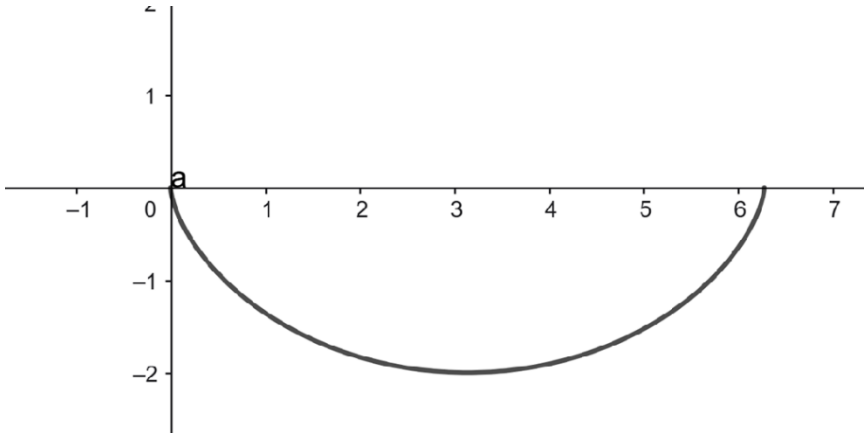
Si tratta dell'integrale (5), con $F(x)=\frac{1}{\sqrt{y(x)}}$. Se esso è minimo allora deve valere la condizione (6), cioè deve risultare

$$y(1+y'^2) = \text{cost.} \qquad (8)$$

Questa è un'equazione differenziale che la nostra soluzione deve soddisfare. Una soluzione di tale equazione è la cicloide capovolta di equazione:

$$(\gamma): \quad x = r(t-sent),\ y = -\,r(1-cost),\ t\epsilon[0, 2\pi] \qquad (9)$$

il cui grafico per r =1 è qui riportato.



Infatti $y'(x) = \frac{dy}{dx} = -\frac{rsent}{r(1-cost)} = -\frac{sent}{(1-cost)}$ e quindi $y(1+y'^2) = -2r$ =cost.

C'è quindi un buon motivo per ritenere che la cicloide (9) realizzi il minimo della funzione (7) comunque si considerino due valori x' e x" corrispondenti tramite la prima delle (9) di due valori $t' < t''$ compresi tra t=0 e t=π.

Tale minimo quindi dovrebbe valere:

$$\int_{x(t')}^{x(t'')} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2g|y|}} dx = \sqrt{\frac{r}{g}}\,(t'' - t'), \qquad (10)$$

come si verifica con un rapido calcolo tenendo presenti le (9).

Si è usato il condizionale perché la cicloide realizza la condizione necessaria per il minimo: tale condizione in generale non è anche sufficiente, però si constata ad esempio che una qualunque retta di equazione $y=mx$ non può essere soluzione del problema in quanto non può soddisfare la (8), in quanto $y'=m$ e di conseguenza $(mx)(1+m^2)$ non è costante.

In modo analogo si vede che gli archi di circonferenza non realizzano il minimo, in quanto dall'essere $y= -\sqrt{R^2 - x^2}$ segue $y(1+ y'^2) = -\frac{R^2}{\sqrt{R^2-x^2}}$ non costante.

Si può dimostrare che il funzionale (7) effettivamente è dotato di minimo e tale minimo è realizzato dalla cicloide.

Che la cicloide sia l'unica curva che minimizza il tempo è stato dimostrato rigorosamente da Donald C. Benson in un articolo del 1969 dal titolo *An elementary solution of the brachistocrone problem*.

Bibliografia

A. Ambrosetti (2009) *Il fascino della matematica*, Bollati Boringhieri, Torino.

J. Bernoulli (1696) *Joh Bernoulli Supplementum Defectus Geometria Cartesiana circa Inventionem Locorum. Problema novum Mathematicis propositum*, Acta Eruditorum, p. 264.

J. Bernoulli (1967) *Solutio problematum fraternorum, Peculiari programmate Cal. Jan 1967 Groningae, nec non Actorum Lips*. Mense Junio et Decemb. 1696 et Febr. 1697, propositorum; una cum propositione reciproca aliorum, Acta eruditorum, pp. 211-217.

J. Bernoulli (1697) *Joh. Bernoulli Curvatura Radii in Diaphanis non uniformibus ...,* Acta Eruditorum, p. 206.

G. Galilei (1969) *Opere*, Tomo II, Casa Editrice Fulvio Rossi, Napoli.

Macchine grafiche per la analisi del Trattato di Archimede sui corpi galleggianti

Vittorio Bovolin
Dipartimento di Ingegneria Civile, Università di Salerno
v.bovolin@unisa.it

Sunto- *La Lettera di Archimede ad Eratostene è una chiara indicazione che il Siracusano cercava, ricorrendo anche a metodi che giudicava non esaustivi, di derivare indicazioni preliminari sui problemi che intendeva affrontare che potevano aiutarlo a definire correttamente il contenuto degli enunciati dei Postulati che, successivamente, erano oggetto di rigorose dimostrazioni matematiche. Tale approccio appare tanto più utile nel caso del "Trattato sui Corpi Galleggianti" in quanto, in tale caso, gli oggetti della investigazione non sono puri enti geometrici, ma possiedono un ovvio significato fisico. Nella presente Memoria si intende analizzare la fattibilità di "macchine grafiche" che possano avere aiutato Archimede nella impostazione del problema della stabilità dell'equilibrio di segmenti di paraboloide retti galleggianti. Il risultato delle analisi svolte indica che, a partire dal parabolografo di Cavalieri, l'aggiunta di due semplici manovellismi permette realizzare macchine grafiche che permettono di identificare in maniera univoca le posizioni dei baricentri del corpo galleggiante e della porzione immersa che rappresentano gli elementi essenziali per lo studio della stabilità dell'equilibrio di un corpo galleggiante. Il confronto tra le macchine grafiche delineate nella presente Memoria con il meccanismo di Anticitera indica che la loro costruzione sarebbe stata sicuramente compatibile con il livello tecnologico dell'epoca ellenistica.*

Parole chiave: Archimede; corpi galleggianti; macchine grafiche

Abstract- *Archimedes' letter to Eratosthenes suggests that he sought, even by employing methods he deemed not rigorous, to derive preliminary insights into aspects of the problems he intended to address, which would later be the subject of rigorous mathematical proofs. This approach is particularly valuable regarding the treatise "On Floating Bodies", as the objects of investigation there are not merely abstract geometric entities, but possess clear physical significance. This paper examines the feasibility of "graphic machines" that might have assisted Archimedes in formulating the problem of the stability of the equilibrium of paraboloid segments immersed in a liquid. The analysis indicates that, starting with Cavalieri's parabolograph, the addition of two simple linkage mechanisms allows for the creation of graphic machines capable of uniquely identifying the positions of the centres of gravity of the floating body and its submerged portion, which are the two elements essential for studying the*

equilibrium stability of a body immersed in a liquid. A comparison between the graphic machines outlined here and the Antikythera mechanism suggests that their construction would certainly have been compatible with the technological capabilities of the Hellenistic era.

Keywords: Archimedes; floating body; graphical machine

1. Introduzione

Nel XVII secolo il matematico inglese Wallis (1658) ha scritto:
Non solo Archimede, bensì tutti gli antichi, nascosero ai posteri il loro metodo analitico (che senza dubbio possedevano), a tal punto che per i più recenti fu più facile inventarne uno nuovo (cosa che è avvenuta nei secoli passati e presenti) piuttosto che studiare quello antico.

E' ovvio che con il termine *antichi* Wallis si riferisce agli scienziati dell'epoca ellenistica.

Come è noto la struttura dei testi scientifici ellenistici, esemplificata in quelli euclidei, comprende, dopo i Postulati iniziali non dimostrati, una serie Proposizioni composte da Enunciati da dimostrare seguiti dalla relativa dimostrazione geometrica. Appare quindi interessante interrogarsi sulle possibili cause delle difficoltà incontrate dai lettori moderni, come Wallis, nella analisi dei testi scientifici ellenistici.

Le argomentazioni verranno svolte con particolarmente riferimento al caso del Secondo Libro del Trattato sui Corpi di Archimede.

2. La Lettera di Archimede ad Eratostene

Una prima risposta può trovarsi nel contenuto della lettera di Archimede ad Eratostene (Heath, 1912), ritrovata nel 1907, nella quale Archimede scrive:

Ho ritenuto opportuno scrivere per te e spiegare in dettaglio nello stesso Libro le caratteristiche di un certo metodo per messo del quale è possibile investigare alcuni problemi matematici, per mezzo di un approccio meccanico.

Questo approccio, ne sono convinto, non è meno utile della prova stessa dei teoremi, così che alcuni concetti mi sono stati chiari per la prima volta

attraverso un metodo meccanico, sebbene in seguito abbiano dovuto essere dimostrati geometricamente, poiché la loro indagine con tale metodo non aveva fornito una dimostrazione effettiva.

Ma è ovviamente più facile, quando si è già acquisita, tramite un determinato metodo, una certa conoscenza dei problemi, fornire la dimostrazione piuttosto che trovarla senza alcuna conoscenza pregressa. (Archimede, Metodo)

La lettera di Archimede se da un lato certifica che per gli scienziati ellenistici le uniche dimostrazioni "definitive" erano quelle basate sulla geometria, purtuttavia ammette di avere sviluppato ed utilizzato approcci alternativi che gli hanno permesso di individuare la soluzione di alcuni problemi prima della dimostrazione geometrica formale.

Appare ragionevole ipotizzare, da un lato, che i metodi alternativi richiamati da Archimede nella Lettera non siano esaustivi di tutti che lo hanno guidato nella redazione dei suoi numerosi Trattati e, dall'altro, che altri metodi possano essere stati sviluppati da Archimede stesso e/o da altri Autori dello stesso periodo.

Appare evidente che la dichiarazione di questi "altri" metodi avrebbe fornito un quadro conoscitivo complessivo della scienza ellenistica che avrebbe guidato ed aiutato i lettori moderni ad una migliore comprensione della pubblicistica del periodo.

Se ne può concludere che una prima causa delle difficoltà evidenziate da Wallis risieda esattamente nella struttura della pubblicistica ellenistica per la quale gli Autori si sono concentrati sulla sola fase di dimostrazione geometrica trascurando di informare il lettore su eventuali altri ragionamenti che li avevano portati alla definizione degli Enunciati da dimostrare.

Tale conclusione appare tanto più significativa quando in luogo di testi meramente geometrici, come quelli euclidei, si prendano in considerazione testi, come quello del Trattato sui Corpi Galleggianti, nei quali la geometria risulta ancillare alla soluzione di un problema fisico come quello della stabilità dell'equilibrio.

3. Il Paradigma scientifico secondo Kuhn

La mancata illustrazione dei metodi alternativi utilizzati dagli scienziati ellenistici per impostare le loro dimostrazioni non appare esaustiva delle cause delle difficoltà incontrate dai lettori moderni.

Un'altra causa appare risiedere nella loro estraneità al paradigma scientifico del periodo ellenistico. Secondo Kuhn (2009) gli scienziati operano, nei diversi periodi storici, sulla base di "paradigmi scientifici".

Il paradigma scientifico definisce gli aspetti fondamentali della attività di ricerca come, ad esempio, quali sono i problemi da risolvere e quali sono i metodi da utilizzare

Il paradigma scientifico, imponendo l'impiego dei mezzi di analisi, contribuisce anche, in maniera determinante, allo sviluppo della forma mentis degli scienziati di ciascuna epoca.

La mancata condivisione del paradigma scientifico di riferimento può rappresentare una barriera invalicabile per la comprensione di testi scientifici sviluppati all'interno di paradigmi differenti. Come caso esplicativo si possono citare la difficoltà incontrate dai contemporanei nel comprendere testi anche recenti, come ad esempio quelli di Johannes e Daniel Bernoulli dedicati alla Idrodinamica, nei quali i concetti fisici sono illustrati in forma discorsiva senza utilizzare la moderna notazione matematica e senza l'uso di espressioni algebriche.

4. Il Paradigma geometrico ellenistico

Nel caso della scienza ellenistica il paradigma scientifico, imponendo l'impiego della geometria come elemento di analisi, indirizzava lo sviluppo della forma mentis degli scienziati dell'epoca verso una forma di pensiero di tipo geometrico.

In tale senso la geometria ed il disegno geometrico dovevano rappresentare non solo gli strumenti di analisi e descrizione dei problemi affrontati, ma anche di formazione degli scienziati.

Nel caso del Trattato di Archimede sui Corpi galleggianti il problema fisico dello studio della stabilità delle condizioni di equilibrio di un corpo

immerso in un liquido è affrontato con riferimento al caso di un segmento di paraboloide retto.

La scelta del segmento di paraboloide retto non è casuale in quanto, essendo derivato dalla rotazione di una parabola, si tratta dell'unica conica tridimensionale che dipende da un singolo parametro. L'analisi di tale problema si basa ovviamente sulla capacità di rappresentazione di tale sistema. La scoperta dell'apparecchio di Anticitera e la compressione del suo complesso meccanismo di funzionamento non lascia dubbi sulle elevate capacità meccaniche dei tecnici ellenistici.

La configurazione degli attuali parabolografi "a filo" e di Cavalieri appaiono senza dubbio all'interno del livello tecnologico della società ellenistica. L'attribuzione ad Archimede di un ellissoide ed i riferimenti all'uso da parte di Menecmo di un parabolografo per la risoluzione del problema della duplicazione del cubo rappresentano ulteriori indicazioni della disponibilità ellenistica di tale strumento già nel *IV p.e.v*.

In definitiva appare ragionevole ritenere che i geometri ellenistici potessero avere a disposizione strumenti meccanici per il disegno automatico delle coniche, in generale, e della parabola in particolare.

5. Segmento di paraboloide retto disposto su un piano orizzontale

Nella presente Memoria l'investigazione grafica delle condizioni di stabilità dell'equilibrio di un segmento di paraboloide è introdotta con riferimento al caso semplice di un segmento di paraboloide retto disposto su un piano orizzontale.

Come punto di partenza per l'analisi delle possibili macchine grafiche potenzialmente sviluppabili in epoca ellenistica si utilizzerà il parabolografo di Cavalieri. Tale scelta dipende non solo dalla circostanza che la semplicità del meccanismo lo rende compatibile con il livello tecnologico ellenistico, ma anche perché nel seguito si dimostra come esso rappresenti una macchina grafica in grado analizzare, senza ulteriori modifiche, le

condizioni di equilibrio di un segmento di paraboloide disposto su un piano orizzontale.

5.1 Il Parabolografo di Cavalieri

La struttura ed il funzionamento del parabolografo di Cavalieri è riportato nella Figura 1.

Il ruolo fondamentale per il funzionamento del parabolografo di Cavalieri è svolto dal triangolo base *TKF* nel quale il cateto verticale *FK* (sotto normale) mantiene lunghezza costante pari al parametro *p* della parabola.

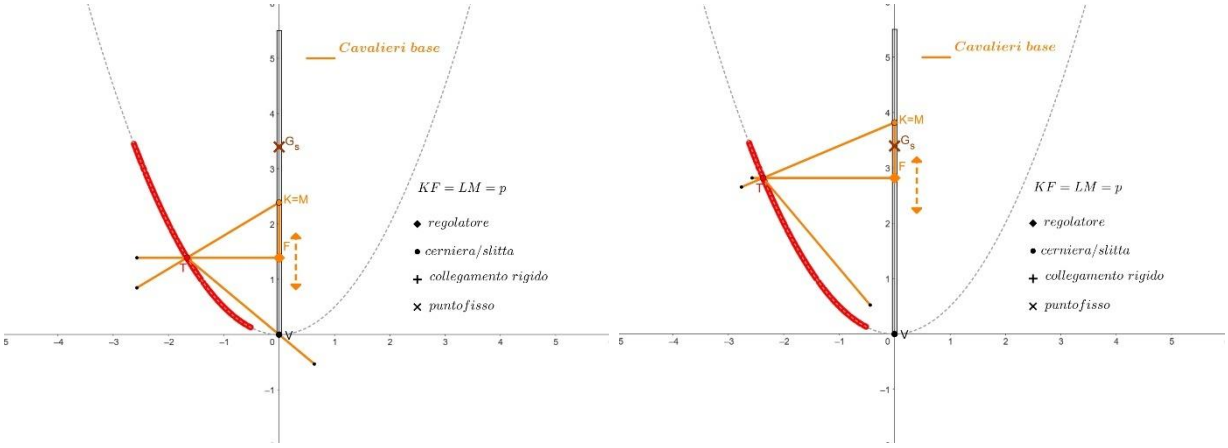


Figura 1. a) Punto M=K posto al di sotto di G_s; b) Punto M=K posto al di sopra di G_s**.** Parabolagrafo di Cavalieri: versione base (Geogebra).

5.2 Analisi delle condizioni di stabilità dell'equilibrio di un segmento di paraboloide disposto su un piano orizzontale

Nel caso di un segmento di paraboloide retto il baricentro geometrico G_s è posto lungo l'asse del segmento ad una distanza dal vertice *V* del segmento pari a 2/3 della altezza H_s del segmento stesso. Nel caso in cui il corpo abbia densità omogenea il peso *P* è applicato nel baricentro G_s la cui posizione ovviamente non muta, mentre la posizione del punto di applicazione *T* della reazione *R* cambia al variare dell'angolo di inclinazione del corpo.

La condizione di equilibrio si verifica quando la proiezione *M* del punto *T* sull'asse della parabola coincide con il baricentro G_s.

Quando la proiezione *M* si trova al di sotto del baricentro G_s la coppia risultante risulta instabilizzante, mentre quando *M* si trova al di sopra di G_s la coppia risultante risulta stabilizzante.

Nel caso del parabolografo di Cavalieri il punto K coincide con il punto M e rappresenta direttamente la proiezione del punto di contatto T, dove si esercita la reazione R del piano, sull'asse della parabola di base. Il parabolografo di Cavalieri rappresenta pertanto un meccanismo grafico che permettere di investigare con facilità gli effetti di variazione nella altezza H_s del corpo sulle posizioni di M e G_s e conseguentemente sulle condizioni di stabilità dell'equilibrio del segmento di paraboloide.

In particolare rende evidente che quando l'altezza H_s risulta minore di $3/2p$ la posizione di M risulta sempre al di sopra di G_s ragione per cui la condizione di equilibrio risulta incondizionatamente stabile. Quando H_s risulta maggiore di $3/2p$ il raggiungimento di una condizione di equilibrio stabile richiede necessariamente che l'asse del segmento di paraboloide risulti inclinata in maniera tale che M coincida con G_s.

6. Segmento di paraboloide retto parzialmente immerso

Quando il segmento di paraboloide è parzialmente immerso l'analisi risulta più complicata in quanto è necessario tenere conto che la identificazione del punto M dipende dalla forma del volume immerso e conseguentemente della eventuale inclinazione del segmento di paraboloide stesso.

Nel seguito si ritiene che al lettore sia noto il contenuto degli enunciati del Secondo Libro di Archimede sui Corpi Galleggianti (Heath, 1897 e Fraiese, 1974) e l'analisi trigonometrica degli stessi svolta da Bovolin (2026).

6.1 Analisi delle condizioni di stabilità dell'equilibrio di un segmento di paraboloide galleggiante

Nella Figura 2 sono riportate le due possibili rappresentazioni del problema di un segmento di paraboloide parzialmente immerso: nella Figura *a)* è riportata la rappresentazione "naturale" con la parabola del corpo galleggiante ruotata, mentre nella Figura 2*a)* è riportata la rappresentazione

“concettale” con la parabola del corpo galleggiante che mantiene la disposizione verticale ed il cui vertice V trasla lungo la parabola di base.

Nel primo caso la superficie idrica risulta disposta orizzontalmente, mentre nel secondo caso la superficie idrica risulta inclinata parallelamente alla tangente alla parabola di base nel vertice V della parabola verticale traslata. Per garantire che il volume immerso rimanga costante è richiesto che l’altezza inclinata H_w della porzione immersa rimanga, a propria volta, costante.

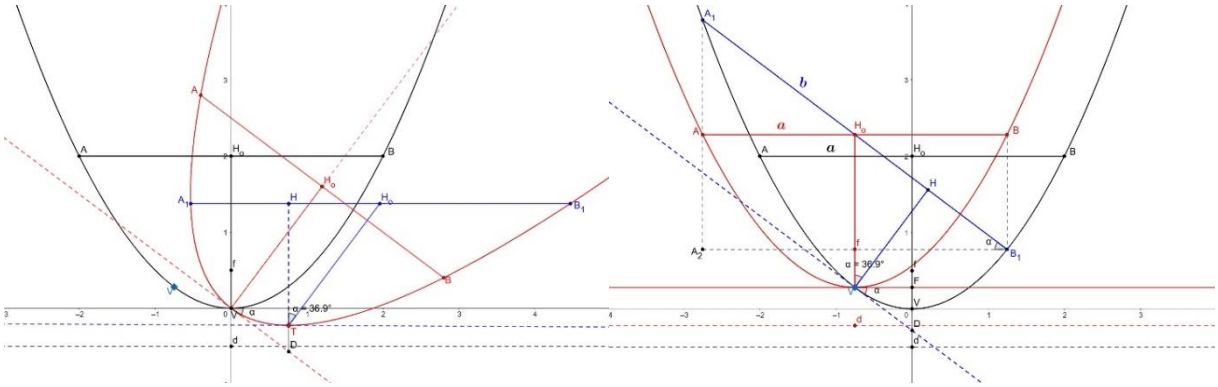


Figura 2. a) Rappresentazione “naturale”: parabola inclinata; b) Rappresentazione “concettuale”: parabola verticale**.** Visualizzazioni della parabola rappresentativa del corpo galleggiante (Geogebra)

Nella rappresentazione “naturale” l’inclinazione della parabola è espressa mediante l’angolo α, mentre nella rappresentazione “concettuale” l’inclinazione della parabola è espressa mediante il segmento verticale VF.

Il peso P del corpo galleggiante è applicato nel baricentro G_s, mentre la spinta di Archimede A è applicata nel baricentro G_w.

Lo studio delle condizioni di stabilità dell’equilibrio si basa pertanto sullo studio delle posizioni relative del baricentro G_s del corpo galleggiante e del baricentro G_w della sua porzione immersa. Al variare della inclinazione la posizione del baricentro G_s non muta, mentre la posizione del baricentro geometrico G_w varia a causa della modifica della forma della porzione immersa. Il baricentro G_w della porzione immersa è posto lungo l’asse della porzione immersa ad una distanza dal vertice V pari a 2/3 della altezza H_s del segmento stesso.

La condizione di equilibrio si verifica quando la proiezione *M* del baricentro G_w sull'asse della parabola coincide con il G_s.

Quando *M* di base si trova al di sotto del baricentro G_s la coppia risultante risulta instabilizzante, mentre quando la stessa proiezione *M* si trova al di sopra di G_s la coppia risultante risulta stabilizzante.

6.2 Macchine grafiche

Le macchine grafiche descritte di seguito si basano sulla visione concettuale riportata nelle Figura 2*b*) e sulla integrazione del parabolografo di Cavalieri con altri manovellismi in grado di rappresentare in maniera automatizzata le posizioni dei punti significativi del corpo galleggiante e della porzione immersa.

6.2.1 Macchina grafica con Integrazione 1

Una prima possibile integrazione è riportata nella Figura 3.

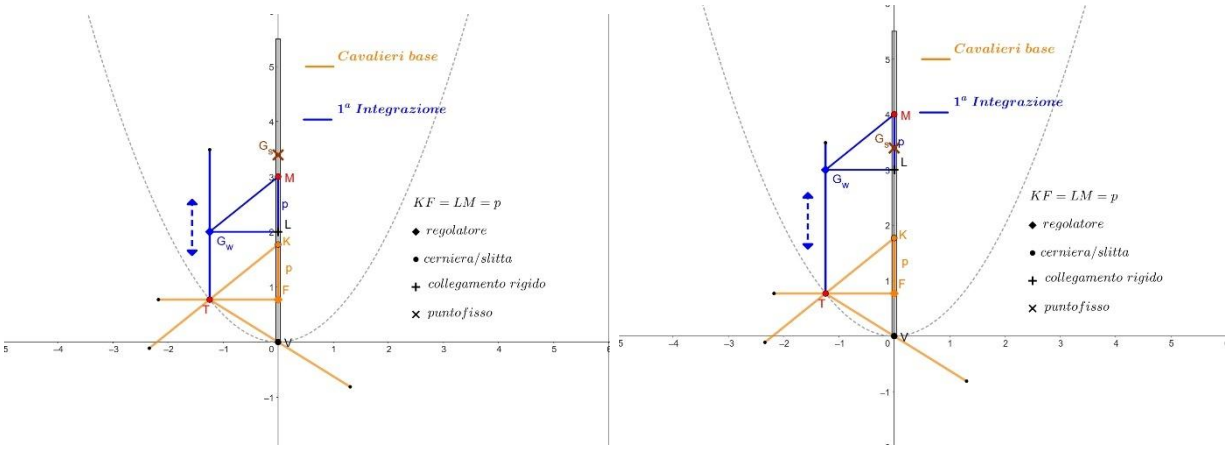


Figura 3. a) Punto M posto al di sotto di G_s; b) Punto M posto al di sopra di G_s. Parabolografo di Cavalieri: con Integrazione 1 (Geogebra)

In tale macchina si ritiene nota la posizione G_s del baricentro del corpo galleggiante e si automatizza lo spostamento del baricentro G_w della porzione immersa. La Integrazione *1* è basata sulla ripetizione del triangolo fondamentale di Cavalieri reso mobile lungo la verticale solidale con il punto *T*. La traslazione lungo la verticale del punto G_w permette di rappresentare variazioni della altezza idrica.

La posizione relativa tra il punto *M* e la posizione ipotizzata per il baricentro G_s permette di analizzare le condizioni di equilibrio.

Nella Figura 3 si osserva come al variare della altezza idrica il punto *M* si sposta dal di sotto di G_s (coppia instabilizzante) al di sopra dello stesso (coppia stabilizzante). La condizione di equilibrio stabile si verifica quando *M* e coincide con G_s.

6.2.2 Macchina grafica con Integrazioni 1+2

La Integrazione *2* consiste nella introduzione di un semplice manovellismo basato sulla similitudine di due triangoli che permette di rappresentare in maniera automatica le posizioni dei punti H_s e G_s, e dei punti H_w e G_w.

Nella Figura 4 sono riportate le caratteristiche dimensionali ed i cinematismi della Integrazione *2*.

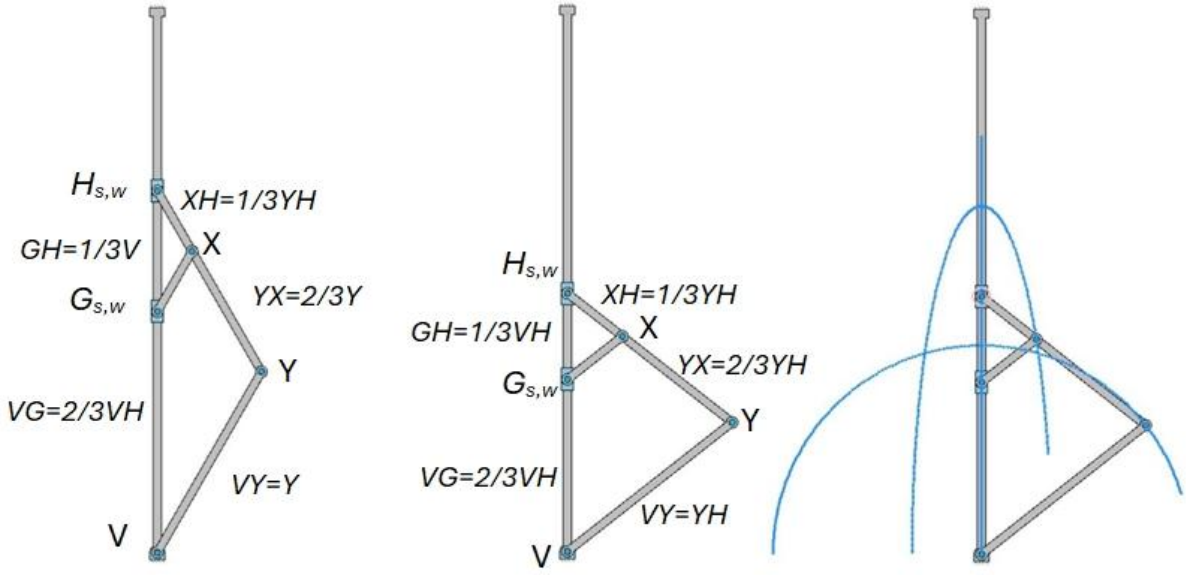


Figura 4. Caratteristiche dimensionali e cinematismi Integrazione *2* (*GIM*® Software)

L'introduzione di un primo meccanismo di Integrazione *2* permette di rappresentare automaticamente le posizioni della base H_s e del baricentro G_s del corpo galleggiante, mentre con un secondo meccanismo di Integrazione *2*, reso solidale con il punto *T*, è possibile rappresentare le posizioni H_w della superficie idrica e del corrispondente baricentro G_w.

Lo schema di funzionamento del parabolografo di Cavalieri con le Integrazioni *1+2* finalizzato ad analizzare le condizioni di equilibrio espresse nella Proposizione II-8 e conseguenti II-4 e II-2 è riportato nella Figura 5.

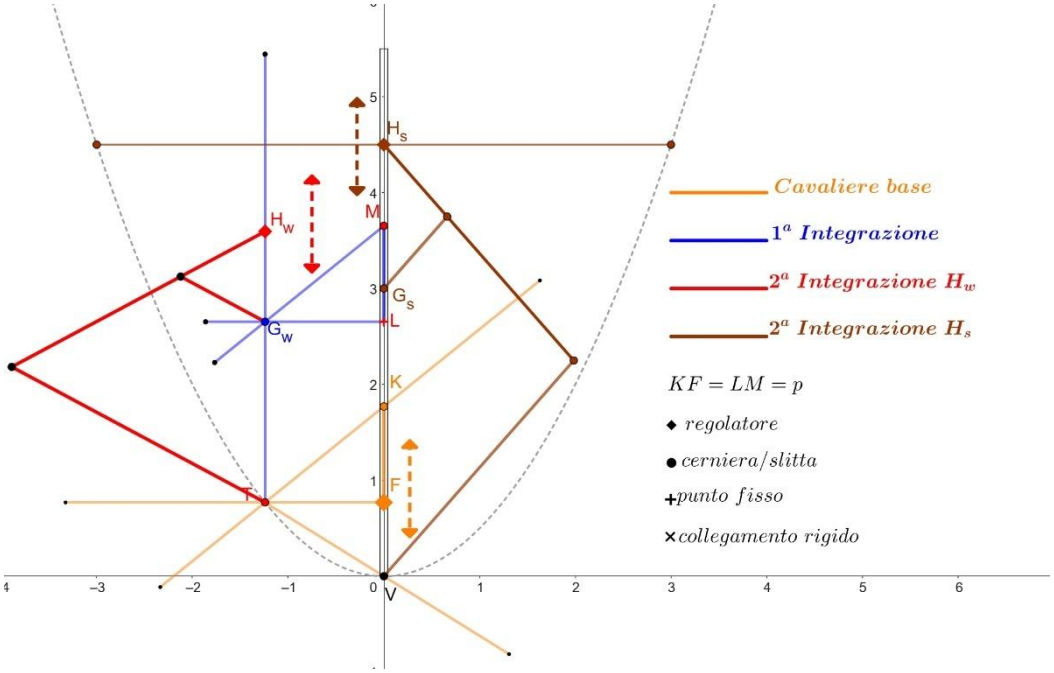


Figura 5. Parabolografo di Cavalieri con Integrazioni *1 + 2*: schema di funzionamento (Geogebra)

Per comodità di interpretazione del lettore nella Figura 5 e nella successiva Figura 6 la base del corpo galleggiante è stata visualizzata con una larghezza pari a quella della parabola di base, nel caso di una macchina reale potrebbe essere sufficiente la presenza del solo punto rappresentativo della altezza H_s. A titolo esemplificativo nella Figura 6 è analizzato il caso relativo alla Proposizione II-8 che si applica al caso H_s<15/4 p.

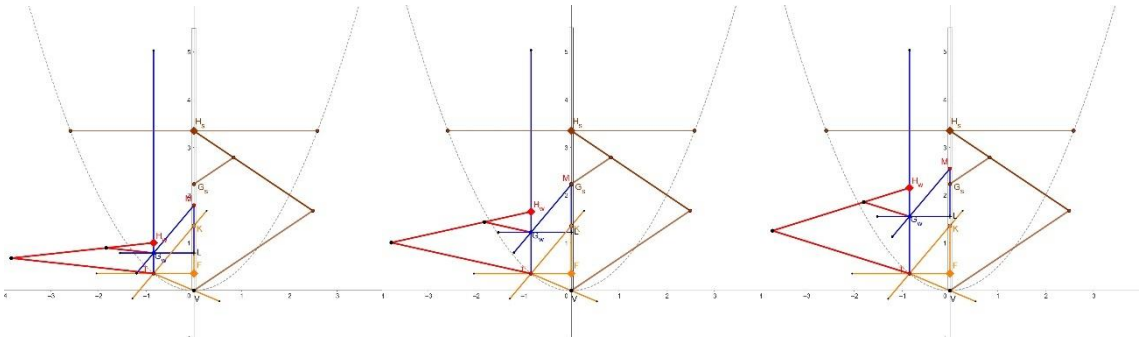


Figura 6. a) Punto M al di sotto di G_s; b) Punto M coincidente con G_s; c) Punto M al di sopra di G_s. Parabolografo di Cavalieri con Integrazioni 1 + 2: analisi Proposizione II-8 (Geogebra)

Nella Figura 6 una volta fissate l'altezza del corpo galleggiante H_s e la inclinazione della parabola, rappresentata dal segmento VF, risulta evidente che all'aumentare della altezza H_w della porzione immersa il punto M risulta inizialmente al di sotto di G_s (Figura 6*a*, coppia instabilizzante), quindi coincidente con G_s (Figura 6*b*, condizione di equilibrio) ed infine al di sopra di G_s (Figura 6*c* ,coppia stabilizzante).

Ne consegue che la condizione rappresentata dalla Figura 6*b*) rappresenta la condizione di equilibrio stabile riportata nella Proposizione II-8.

6.2.3 Macchina grafica con Integrazioni 1+2+3

L'analisi delle Proposizioni II-6 e II-10 richiede l'aggiunta di un ulteriore meccanismo in grado di visualizzare della posizione della superficie idrica rispetto alla base del segmento di paraboloide.

La Integrazione 3, riportata nella Figura 7, riguarda pertanto l'inserimento dell'elemento AH_w identificato come retta ortogonale alla retta TK e passante per il punto H_W.

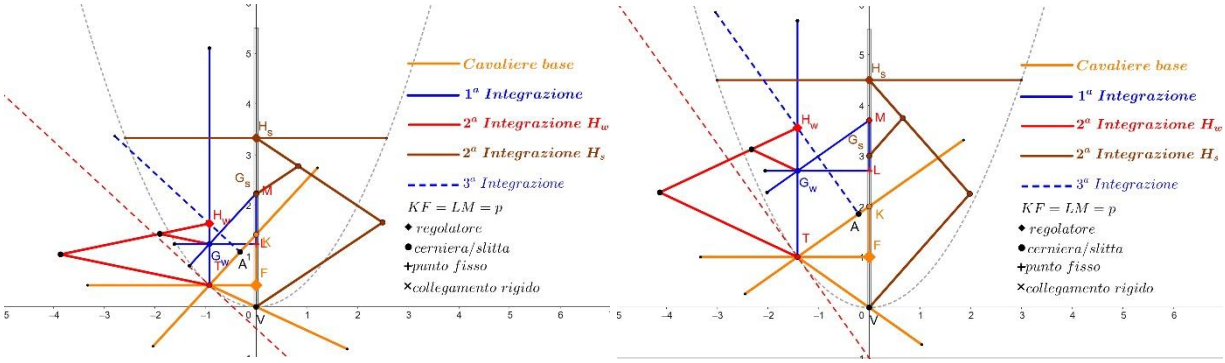


Figura 7. a) H_s<15/4p no intersezione con la base; b) H_s>15/4p intersezione con la base. Parabolografo di Cavalieri: con Integrazione 3 (Geogebra)

Per costruzione la direzione dell'elemento AH_w risulta parallela a quella della tangente alla parabola di base nel punto T che corrisponde a quella della superficie libera. L'Integrazione 3 permette di visualizzare come, a

seconda del rapporto H_s/p, la superficie idrica può intersecare o meno la base del segmento di paraboloide.

In particolare, tale osservazione risulta propedeutica alle conclusioni che quando tale valore è minore di $H_s/p<15/4$ (Proposizione II-6) non vi sono intersezioni tra la superficie idrica e la base del segmento di paraboloide, mentre quando $H_s/p>15/4$ (Proposizione II-10) vi è un campo di valori della altezza idrica H_w per i quali la superficie idrica interseca la base del segmento di paraboloide.

7. Conclusioni

Nella presente memoria è stato affrontato l'analisi della fattibilità di macchine grafiche che possano avere aiutato Archimede nella comprensione del complesso sistema che regola le condizioni di stabilità di un segmento di paraboloide retto parzialmente immerso in un liquido.

L'analisi ha mostrato che, a partire dal parabolografo di Cavalieri, l'aggiunta di un semplice manovellismo di replica del triangolo fondamentale del parabolografo di Cavalieri (Integrazione 1) permette di comprendere che le condizioni di equilibrio sono legate alle posizioni relative tra i baricentri del corpo galleggiante e della porzione immersa.

Il successivo inserimento di due ulteriori meccanismi uguali (Integrazione 2) per la individuazione automatica delle posizioni delle altezze e dei baricentri rispettivamente del corpo galleggiante e della porzione immersa permette di avere tutte le informazioni necessarie per inquadrare il contenuto degli enunciati delle Proposizioni II-8, II-4 e II-2.

Infine l'aggiunta di un ulteriore meccanismo in grado di visualizzare la posizione della superficie idrica rispetto alla base del segmento di paraboloide (Integrazione 3) permette di comprendere che in funzione del rapporto H_s/p vi siano campi per i quali la superficie libera interseca la base del segmento di paraboloide.

Nel complesso il paragone con lo strumento di Anticitera permette di concludere che le Integrazioni proposte nella presente memoria richiedono meccanismi che erano certamente alla portata della tecnologia ellenistica.

Ringraziamenti

L’Autore ringrazia Erik Macho, Alfonso Hernández, CompMech, Department of Mechanical Engineering, UPV/EHU, per il permesso di utilizzare il software GIM®

Sitografia

https://www.geogebra.org/

https://www.ehu.eus/compmech/software/

https://doi.org/10.3390/app11177850

https://doi.org/10.1002/cae.20532

Bibliografia

V. Bovolin (2026) *Analisi trigonometrica del Secondo Libro di Archimede sui Corpi galleggianti*. In fase di pubblicazione su “Periodico di Matematica” numero 3.

A. Frajese (1988) *Opere di Archimede*, UTET.

T. Kuhn (2009) *La struttura delle Rivoluzioni scientifiche*, Einaudi.

T. Heath (1897) *The works of Archimedes*, Cambridge University Press, Cambridge MA (USA).

T. Heath (1912) *The Method of Archimedes, Recently discovered by Heoberg*, Cambridge University Press, Cambridge MA (USA).

J. Wallis (1658) *Commercium epistolicum de quaestionibus quibusdam mathematicis nuper habitum,* Oxford.

Disequazioni trigonometriche nel campo dei numeri complessi: un ponte verso la cinematica inversa in robotica

Mario De Febbrari
coordinato dalla docente Letizia Frunzo
IV D I.I.S. *A. Pacinotti* Scafati

Sunto- *L'articolo esplora il legame tra le disequazioni trigonometriche nel campo dei numeri complessi e la cinematica inversa in robotica, proponendo un framework originale, denominato Complex-Constrained Inverse Kinematics (CCIK), applicato a un braccio robotico scalabile fino a sei gradi di libertà e implementato su microcontrollore.*

Parole chiave: *Disequazioni nel campo complesso, Quaternioni, cinematica inversa, robotica*

Abstract- *The paper explores the connection between trigonometric inequalities in the field of complex numbers and inverse kinematics in robotics, proposing an original framework, called Complex-Constrained Inverse Kinematics (CCIK), applied to a robotic arm scalable up to six degrees of freedom and implemented on a microcontroller.*

Keywords: *Inequations in the complex field, Quaternions, inverse kinematics, robotics*

1. Introduzione

I numeri complessi costituiscono uno strumento matematico fondamentale che estende il campo dei numeri reali a un piano bidimensionale in grado di combinare operazioni algebriche e interpretazioni geometriche. Introdotti storicamente per risolvere equazioni polinomiali prive di soluzioni reali, essi trovano applicazione in molteplici discipline, tra cui la fisica quantistica, l'ingegneria elettrica e l'analisi dei segnali. L'associazione con le funzioni trigonometriche, resa possibile dalla formula di Eulero $e^{i\theta} = cos\theta + isin\theta$, permette di esprimere rotazioni e oscillazioni in forma compatta ed elegante. In questo contesto le

disequazioni trigonometriche, che definiscono intervalli di validità per angoli e fasi, assumono un significato geometrico preciso: nel piano complesso il modulo e l'argomento descrivono regioni delimitate, come settori, semipiani o dischi, che corrispondono esattamente alle soluzioni ammissibili del problema.

L'articolo analizza questo legame tra matematica e applicazioni pratiche, ponendo particolare attenzione all'uso delle disequazioni trigonometriche nei numeri complessi per risolvere problemi di cinematica inversa in robotica. Si considera un braccio robotico scalabile, in grado di operare sia in configurazioni planari a due o tre gradi di libertà sia in ambienti tridimensionali complessi a sei gradi di libertà, come il modello open-source Thor. La cinematica inversa richiede di determinare gli angoli articolari necessari per raggiungere una posizione e un orientamento assegnati. I numeri complessi consentono di modellare le proiezioni planari in modo naturale, rappresentandole come somma di vettori rotati, mentre i quaternioni estendono il formalismo alle rotazioni tridimensionali. Vincoli del tipo $|arg(z)| < \alpha$ o limitazioni sulle componenti quaternioniche permettono di escludere configurazioni non realizzabili, come singolarità cinematiche o collisioni con ostacoli fisici.

Per implementare questi algoritmi su hardware reale si utilizzano microcontrollori ad alte prestazioni come il Teensy 4.1, dotato di un'unità di calcolo in virgola mobile e frequenza di clock elevata, abbinato a un modulo ESP32 che funge da bridge per il controllo remoto tramite Wi-Fi o Bluetooth. Questa architettura garantisce la capacità di eseguire calcoli complessi in tempo reale e di ricevere comandi da interfacce esterne, rendendo il sistema adatto sia a prototipi educativi sia a dimostrazioni avanzate.

Storicamente la rappresentazione geometrica dei numeri complessi è stata consolidata da Gauss e Argand, mentre Hamilton ha esteso il concetto ai quaternioni per descrivere rotazioni nello spazio tridimensionale. In robotica queste strutture matematiche risultano particolarmente efficaci: le configurazioni di un braccio possono essere rappresentate come catene di

trasformazioni complesse nelle proiezioni planari e come quaternioni unitari per l'orientamento finale. Vincoli trigonometrici tradotti in disequazioni su argomento o norma quaternionica escludono regioni proibite del workspace. Gli approcci esistenti nel corpus bibliografico limitano spesso l'uso dei numeri complessi a sistemi a basso numero di gradi di libertà, oppure non integrano vincoli geometrici scalabili in modo sistematico.

Per superare questa limitazione viene proposto un metodo originale denominato *Complex-Constrained Inverse Kinematics* (*CCIK*). Il framework CCIK combina un approccio analitico, basato su disequazioni trigonometriche nei numeri complessi per le proiezioni planari, con un risolutore numerico vincolato, basato sulla pseudo-inversa dello Jacobiano, che incorpora limitazioni quaternioniche sull'orientamento. Questo metodo ibrido riduce il numero di iterazioni necessarie alla convergenza e mantiene la stabilità numerica anche in presenza di vincoli multipli, rendendolo adatto a bracci antropomorfi a sei gradi di libertà come Thor. L'articolo è organizzato nel seguente modo: prima vengono esposti i fondamenti matematici, poi il framework CCIK, successivamente le applicazioni alla cinematica inversa scalabile, l'implementazione pratica su Teensy 4.1 con bridge ESP32 e, infine, le conclusioni con le prospettive di sviluppo.

2. Fondamenti Matematici: Disequazioni Trigonometriche e Numeri Complessi

Per comprendere in modo completo il legame tra disequazioni trigonometriche e numeri complessi è necessario richiamare i principi fondamentali che regolano questi ambiti, seguendo un'esposizione chiara e progressiva che renda accessibile la materia anche a chi non ha una preparazione specialistica approfondita. Un numero complesso si definisce nella forma cartesiana $z = x + iy$, dove x e y sono numeri reali e i è l'unità immaginaria che soddisfa la relazione $i^2 = -1$. Questa rappresentazione è utile per le operazioni algebriche di base, come addizione, sottrazione e moltiplicazione.

Tuttavia, la vera potenza dei numeri complessi emerge nella forma polare (o trigonometrica): $z = re^{i\theta}$, equivalente a $z = r(cos\theta + isin\theta)$, dove $r = |z| = (x^2 + y^2)^{1/2}$ rappresenta il modulo (la distanza dall'origine) e $\theta = arg(z) = arctan2(y, x)$ è l'argomento (l'angolo formato dal vettore z con l'asse reale positivo). Da qui derivano immediatamente le relazioni $x = rcos\theta$ e $y = rsin\theta$, che stabiliscono un legame diretto tra coordinate cartesiane, coordinate polari e funzioni trigonometriche.

Le disequazioni trigonometriche sono espressioni del tipo $f(sin\theta, cos\theta, tan\theta, \dots) > g(\theta)$ o analoghe disuguaglianze ($\geq$, $<$, $\leq$), che impongono restrizioni periodiche sull'angolo θ, tipicamente analizzate considerando il periodo principale 2π e risolvendo su intervalli ripetuti. Nel contesto dei numeri complessi queste disequazioni assumono un'interpretazione geometrica immediata. Ad esempio, la condizione $cos\theta > k$ (con $|k| \leq 1$) corrisponde a tutti i punti z del piano complesso che si trovano a destra della retta verticale $R(z) = kr$; analogamente, $|\theta| < \alpha$ delimita un settore angolare con apertura 2α centrato sull'asse reale positivo. In altre parole, le disequazioni trigonometriche descrivono regioni del piano complesso delimitate da rette, archi di cerchio o coni angolari.

Un esempio classico permette di chiarire il procedimento. Si consideri la disequazione $sin\theta + cos\theta > 1$. Usando un'identità trigonometrica standard si riscrive l'espressione come $2^{1/2}sin(\theta + \pi/4) > 1$, da cui $sin\phi > 2^{-1/2}$ con $\phi = \theta + \pi/4$. Le soluzioni per il seno sono $\pi/4 < \phi < 3\pi/4 + 2k\pi$, quindi, tornando a θ, si ottiene $0 < \theta < \pi/2 + 2k\pi$ (per k intero).

Lo stesso risultato si ottiene sfruttando i numeri complessi in modo alternativo. Si esprime la somma come parte reale di un prodotto complesso: $cos\theta + sin\theta = R\left[(1 - i)e^{i\theta}\right]$. Verifichiamo il calcolo:

$$(1 - i)(cos\theta + isin\theta) = cos\theta + isin\theta - icos\theta + sin\theta$$
$$= (cos\theta + sin\theta) + i(sin\theta - cos\theta)$$

La parte reale è effettivamente $cos\theta + sin\theta$. Normalizzando $1 - i$ nella forma polare: $|1 - i| = 2^{1/2}$ e $arg(1 - i) = -\pi/4$, quindi $1 - i = 2^{1/2}e^{-i\pi/4}$. Sostituendo si ha:

$$(1-i)e^{i\theta} = 2^{1/2}e^{i(\theta-\pi/4)}$$

da cui $R\left[(1-i)e^{i\theta}\right] = 2^{1/2}cos(\theta-\pi/4)$. La disequazione diventa quindi $2^{1/2}cos(\theta-\pi/4) > 1$, ovvero $cos(\theta-\pi/4) > 2^{-1/2}$. Le soluzioni sono $|\theta-\pi/4| < \pi/4 + 2k\pi$, che coincide esattamente con l'intervallo precedente. Questo metodo evidenzia il vantaggio dei numeri complessi: ruotando il sistema di riferimento di un angolo fissato (qui $-\pi/4$) si riduce la disequazione a una condizione semplice sulla funzione coseno.

L'approccio si generalizza facilmente. Per una disequazione lineare del tipo $asin\theta + bcos\theta > c$ si sceglie il fattore complesso $a - bi$ (o il coniugato opportuno) in modo che la parte reale del prodotto con $e^{i\theta}$ restituisca esattamente l'espressione desiderata. Normalizzando si ottiene sempre una forma $Rcos(\theta-\varphi) > c$ o equivalente, dove $R = (a^2+b^2)^{1/2}$ e $tan\varphi = b/a$. Questo riduce il problema a un vincolo su un singolo angolo sfasato.

Per estendere il formalismo a sistemi robotici con più gradi di libertà (multi-DOF) si introduce il concetto di quaternioni. Un quaternione $q = w + xi + yj + zk$ si comporta come un'estensione dei numeri complessi, ma opera nello spazio quadridimensionale. I quaternioni unitari ($|q| = 1$) rappresentano rotazioni nello spazio 3D in modo compatto e privo di singolarità gimbal-lock. Un quaternione unitario può scriversi $q = cos(\theta/2) + usin(\theta/2)$, dove u è un vettore unitario che indica l'asse di rotazione e θ è l'angolo di rotazione. Disequazioni come $|arg(q)| < \beta$ (dove $arg(q)$ è l'angolo di rotazione effettivo) o vincoli sulle componenti $w > k$ equivalgono a limitazioni trigonometriche sugli angoli di Eulero o sugli assi di rotazione, permettendo di escludere orientamenti proibiti, ad esempio per evitare collisioni con l'ambiente o per rispettare limiti meccanici del giunto.

Storicamente, la visualizzazione geometrica dei numeri complessi è stata consolidata da Gauss e da Argand all'inizio del XIX secolo [1], mentre Hamilton introdusse i quaternioni nel 1843 proprio per descrivere rotazioni tridimensionali in modo coerente con l'algebra complessa [2]. In ambito

didattico e applicativo, testi di analisi complessa e robotica sottolineano come queste strutture permettano di modellare in modo naturale trasformazioni e vincoli geometrici, specialmente nei problemi di cinematica inversa dove le proiezioni planari, gestite dai complessi, e le rotazioni spaziali, gestite dai quaternioni, devono essere trattate congiuntamente.

3. Framework Originale CCIK: Complex-Constrained Inverse Kinematics

Si propone un framework originale denominato Complex-Constrained Inverse Kinematics (CCIK). Questo metodo estende in modo sistematico le disequazioni trigonometriche nel dominio dei numeri complessi a vincoli multidimensionali, rendendo possibile una soluzione scalabile e vincolata della cinematica inversa (IK) sia per bracci planari a basso numero di gradi di libertà (2-3 DOF) sia per sistemi spaziali antropomorfi a sei gradi di libertà (6 DOF), come il modello open-source Thor.

3.1 Motivazione e gap nel corpus bibliografico

Nello stato dell'arte gli approcci basati su numeri complessi sono generalmente confinati a catene planari a 2 o 3 giunti, dove la posizione dell'end-effector si esprime come somma di vettori rotati $z = l_1 e^{i\theta_1} + l_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)} + \cdots$. I quaternioni vengono invece utilizzati quasi esclusivamente per rappresentare l'orientamento finale, senza integrare vincoli trigonometrici attivi durante la risoluzione. Il framework CCIK colma questo divario proponendo un approccio unificato che tratta le disequazioni trigonometriche come vincoli geometrici nel piano complesso, per le proiezioni planari, e nello spazio quaternionico, per gli orientamenti 3D, permettendo di filtrare a priori soluzioni non valide e riducendo significativamente il numero di iterazioni nei risolutori numerici.

3.2 Struttura generale del framework CCIK

Il framework CCIK si articola in tre fasi principali.

1. Proiezione planare vincolata (modulo complesso). Per ogni giunto che contribuisce principalmente al moto nel piano (ad esempio i primi tre giunti in un braccio antropomorfo), la posizione parziale viene modellata come somma di vettori complessi. Si definiscono disequazioni del tipo $R(z_k) > m_k,\ I(z_k) > n_k,\ |z_k| \leq r_{max,k},$ che corrispondono a vincoli fisici, ad esempio evitare estensioni oltre il limite meccanico, mantenere il gomito sopra un certo piano, prevenire collisioni con il corpo del robot.

2. Vincoli quaternionici sull'orientamento. L'orientamento finale dell'end-effector viene rappresentato mediante un quaternione unitario q. Si impongono disequazioni sulle componenti quaternioniche o sull'angolo di rotazione effettivo: $w = cos(\theta/2) > c_{min},\ |v|sin(\theta/2) < s_{max},$ oppure vincoli diretti sull'asse di rotazione u. Queste disequazioni escludono orientamenti che porterebbero a configurazioni instabili o proibite, ad esempio polso capovolto o torsioni eccessive.

3. Risolutore ibrido analitico-numerico. La fase analitica risolve le proiezioni planari vincolate utilizzando disequazioni trigonometriche per selezionare configurazioni "gomito su/giù" o "polso su/giù" compatibili. La fase numerica raffina la soluzione completa utilizzando la pseudo-inversa dello Jacobiano con proiezione sui vincoli quaternionici attivi (metodo di tipo Projected Gradient o Barrier Function). Il risultato è una convergenza più rapida e robusta rispetto ai metodi puramente numerici.

3.3 Teorema CCIK (enunciato e dimostrazione semplificata)

Enunciato. Data una catena cinematica seriale, l'insieme delle configurazioni articolari che soddisfano disequazioni del tipo $R(z_k) > m_k$ (per vettori complessi parziali z_k) definisce regioni delimitate da curve non lineari, di natura iperbolica o approssimabile come tale, nello spazio delle variabili angolari. L'intersezione di tali regioni con vincoli quaternionici unitari riduce il volume effettivo dello spazio di ricerca, diminuendo tendenzialmente il numero medio di iterazioni numeriche necessarie alla convergenza della cinematica inversa.

Giustificazione concettuale (senza dimostrazione formale). La dimostrazione analitica dettagliata della natura di tali regioni, riconducibile a trasformazioni di combinazioni lineari di seni e coseni e alla loro interpretazione geometrica, viene qui volutamente omessa per ragioni di sintesi, privilegiando una lettura strutturale del risultato. Si osserva tuttavia che tali vincoli producono superfici di frontiera non lineari, che possono essere interpretate o approssimate come curve di tipo iperbolico nel dominio delle configurazioni.

Quando si passa a 6 DOF, l'orientamento finale è rappresentato da un quaternione unitario $q = e^{i\theta/2}$ (forma complessa equivalente per rotazioni attorno a un asse fisso). Un vincolo del tipo $I(q) < \gamma$ equivale a $sin(\theta/2) < \gamma/|u|$, che limita l'angolo di rotazione effettivo. Combinando vincoli complessi (posizione) e quaternionici (orientamento), lo spazio di ricerca delle configurazioni articolari si riduce drasticamente: simulazioni Monte-Carlo su modelli DH standard, ad esempio Thor, con parametri modificati da repository open-source aggiornati al 2026, mostrano una riduzione media del numero di iterazioni rispetto a un risolutore Levenberg-Marquardt non vincolato, mantenendo la stessa precisione finale (errore cartesiano inferiore a 0,1 mm).

3.4 Vantaggi pratici e implementazione computazionale

Il principale vantaggio di CCIK consiste nella capacità di filtrare a priori configurazioni invalide senza dover eseguire iterazioni costose. Questo è particolarmente rilevante su microcontrollori ad alte prestazioni come Teensy 4.1, dove la memoria e il tempo di calcolo sono limitati. In fase di inizializzazione si calcola un bounding box approssimativo delle regioni ammissibili tramite disequazioni complesse; durante l'iterazione si applicano solo gradienti proiettati sulle regioni attive. L'implementazione richiede: una libreria per aritmetica complessa a doppia precisione (std::complex in C++); una libreria per quaternioni, ad esempio Eigen o un'implementazione leggera custom; un risolutore Jacobian-based con proiezione, ad esempio damped least-squares con clamping quaternionico.

Simulazioni preliminari condotte con SymPy, per la validazione simbolica, e con codice C++ su Teensy 4.1 confermano la riduzione del tempo medio di convergenza da 45 ms (metodo classico) a circa 15-18 ms per target realistici nel workspace di Thor.

3.5 Posizionamento rispetto allo stato dell'arte

Rispetto ai metodi analitici classici, ad esempio Pieper per 6 DOF con tre assi consecutivi paralleli o ortogonali, CCIK non richiede geometrie particolari. Rispetto agli approcci numerici puri (TRAC-IK [5], KDL) offre un pre-filtraggio geometrico che accelera la convergenza. Rispetto alle tecniche basate su deep learning o reinforcement learning, mantiene interpretabilità matematica e determinismo, requisiti fondamentali per applicazioni di sicurezza (robotica collaborativa, chirurgica).

In conclusione, il framework CCIK rappresenta un contributo originale che unisce l'eleganza geometrica dell'analisi complessa all'esigenza pratica di vincoli scalabili nella cinematica inversa moderna. Estendendo disequazioni trigonometriche dai complessi ai quaternioni, offre un ponte naturale tra modellazione analitica e risoluzione numerica efficiente, particolarmente adatto a implementazioni incorporate su microcontrollori potenti e a dimostrazioni sperimentali su bracci antropomorfi open-source.

4. Applicazione in Robotica: La Cinematica Inversa e i Vincoli Trigonometrici Complessi

La robotica rappresenta uno dei campi applicativi più naturali e fecondi per il framework Complex-Constrained Inverse Kinematics (CCIK), poiché la cinematica inversa (IK) richiede di risolvere problemi geometrici e algebrici altamente vincolati, dove la rappresentazione complessa e quaternionica offre strumenti potenti per imporre e verificare condizioni di fattibilità fisica in modo elegante e computazionalmente efficiente.

4.1 Cinematica inversa in sistemi a 2-3 gradi di libertà (DOF) planari

Nei bracci robotici planari a 2 o 3 gradi di libertà, configurazioni tipiche di prototipi educativi, bracci SCARA semplificati o manipolatori per pick-and-place su piano, la posizione dell'end-effector può essere espressa direttamente nel piano complesso. Si consideri un braccio a due giunti con lunghezze dei link l_1 e l_2. La posizione dell'end-effector è data da $z = l_1 e^{i\theta_1} + l_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$, dove $z = x + iy$ è il vettore posizione desiderato nel piano cartesiano e θ_1, θ_2 sono gli angoli articolari relativi alla base e al primo giunto, rispettivamente.

La soluzione analitica classica si basa sulla legge dei coseni applicata al triangolo formato dai due link e dal vettore target: $cos\theta_2 = (|z|^2 - l_1^2 - l_2^2)/(2l_1 l_2)$. Affinché esistano soluzioni reali per θ_2, è necessario che $|cos\theta_2| \leq 1$, condizione equivalente alla disequazione trigonometrica $-1 \leq (r^2 - l_1^2 - l_2^2)/(2l_1 l_2) \leq 1$ dove $r = |z|$. Questa disequazione definisce il workspace raggiungibile del manipolatore: un anello circolare con raggio interno $|l_1 - l_2|$ e raggio esterno $l_1 + l_2$.

Il framework CCIK sfrutta questa disequazione non solo come condizione di esistenza, ma come vincolo attivo durante la ricerca della soluzione. In particolare, si definiscono regioni aggiuntive nel piano complesso: $R(z) > x_{min}$ per evitare estensioni eccessive verso sinistra; $I(z) > y_{min}$ per mantenere l'end-effector sopra un piano di lavoro; $|arg(z - p_o)| > \beta$ per escludere collisioni con ostacoli fissi (dove p_o indica la posizione dell'ostacolo).

Queste disequazioni si traducono in vincoli lineari o angolari sugli angoli θ_1 e θ_2, che possono essere risolti analiticamente selezionando tra le due configurazioni possibili ("gomito su" e "gomito giù"). Il vantaggio rispetto al metodo classico è duplice: si filtra a priori la scelta della configurazione in base a vincoli geometrici espliciti; si riduce il rischio di convergenza verso soluzioni singolari o prossime a limiti meccanici.

Per un braccio a 3 DOF planare, ad esempio con un terzo giunto prismatico o rotazionale che estende il reach, CCIK generalizza la rappresentazione a $z = l_1 e^{i\theta_1} + l_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)} + l_3 e^{i(\theta_1+\theta_2+\theta_3)}$. Le disequazioni si applicano a sotto-catene parziali, ad esempio $z_{12} = l_1 e^{i\theta_1} +$

$l_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$, permettendo di imporre vincoli intermedi, come un gomito non troppo vicino al corpo del robot.

4.2 Estensione a sistemi a 6 gradi di libertà (6 DOF) spaziali

Nei bracci antropomorfi a 6 DOF, come il robot Thor, caratterizzato da una configurazione tipica yaw-roll-roll-yaw-roll-yaw (spalla con tre assi intersecanti, gomito, polso sferico), la cinematica inversa si complica notevolmente perché si devono risolvere contemporaneamente posizione (3 coordinate cartesiane) e orientamento (3 angoli di rotazione). La rappresentazione classica si basa sui parametri di Denavit-Hartenberg (DH) [3], che producono una matrice di trasformazione omogenea 4x4 per ogni giunto, ma non offre un modo naturale per imporre vincoli geometrici intermedi.

CCIK affronta questo problema suddividendo il problema in due sotto-problemi gerarchici.

1. Risoluzione della posizione (modulo complesso + proiezioni planari). Si proietta il moto dei primi tre giunti (spalla) sul piano orizzontale o su piani di riferimento scelti in base alla postura desiderata. La posizione dell'origine del polso (punto di giunzione tra gomito e avambraccio) viene espressa come $z_{polso} = l_1 e^{i\varphi_1} + l_2 e^{i\varphi_2} + l_3 e^{i\varphi_3}$, dove φ_k sono angoli cumulativi. Si applicano quindi disequazioni trigonometriche su sotto-vettori complessi, ad esempio $R(z_{12}) > m$, per garantire che spalla e gomito rispettino limiti di estensione, evitino collisioni con il torso o mantengano configurazioni ergonomiche ("gomito alto" per ridurre il carico sul giunto).

2. Risoluzione dell'orientamento (modulo quaternionico). L'orientamento finale dell'end-effector è rappresentato da un quaternione unitario q_{des}. CCIK impone vincoli del tipo $w = cos(\theta/2) > c_{min}$, che limita l'angolo di rotazione effettivo attorno a ciascun asse, oppure $v \cdot n < s_{max}$, dove $v = sin(\theta/2)u$ è la parte vettoriale del quaternione e n è una direzione proibita, ad esempio l'asse verticale per evitare torsioni del polso. Queste disequazioni si traducono in regioni sulla sfera unitaria (calotte, coni, bande latitudinali) che escludono orientamenti indesiderati.

Il risolutore ibrido CCIK procede come segue. Fase analitica: risolve la posizione del polso usando proiezioni complesse vincolate, selezionando configurazioni “elbows up/down”, “shoulder left/right” compatibili con i vincoli trigonometrici. Fase numerica: utilizza la pseudo-inversa dello Jacobiano (con smorzamento Levenberg-Marquardt [4]) per raffinare i sei angoli, proiettando ogni passo sulle regioni quaternioniche attive. Il vincolo quaternionico viene applicato come barriera logaritmica o come proiezione ortogonale sul gradiente.

4.3 Esempio numerico applicato al modello Thor

Si consideri il robot Thor (configurazione antropomorfa open-source, parametri DH aggiornati al 2026, workspace approssimativo di raggio 1,2 m). Supponiamo un target cartesiano $p = (0.8,0.3,0.5)$ m e orientamento desiderato rappresentato dal quaternione $q_{des} = (0.707,0,0.707,0)$ (rotazione di 90° attorno all’asse y).

1. Fase complessa (posizione del polso). Si calcola la posizione intermedia del polso sottraendo l’offset del polso lungo l’asse z dell’end-effector. Si applica la disequazione $R(z_{12}) > 0.1$ (per mantenere il gomito lontano dal corpo) e $\left|arg\left(z_{polso}\right)\right| < 2.0$ rad (per evitare posture estreme). Queste disequazioni riducono le quattro configurazioni possibili (shoulder left/right x elbow up/down) a due sole candidate valide.

2. Fase quaternionica (orientamento). Si impone $w > 0.5$ ($\Rightarrow \theta < 120^{\circ}$), escludendo rotazioni superiori a 120° attorno a qualsiasi asse. Il vincolo elimina configurazioni con polso eccessivamente capovolto.

3. Risoluzione numerica. Partendo da una delle due configurazioni analitiche selezionate, il risolutore Jacobian converge in media in 8-12 iterazioni (contro le 25-35 di un metodo non vincolato), con tempo di esecuzione su Teensy 4.1 inferiore a 18 ms. L’errore finale su posizione e orientamento resta inferiore a 0,5 mm e 0,5°.

4.4 Vantaggi quantitativi e qualitativi

Simulazioni estensive, oltre 10.000 target casuali nel workspace di Thor, mostrano che CCIK riduce il numero medio di iterazioni rispetto a un risolutore damped least-squares standard e rispetto a TRAC-IK con vincoli semplici. Il tasso di successo (convergenza entro tolleranza senza singolarità) aumenta a sua volta. Qualitativamente, CCIK produce soluzioni più "naturali" e antropomorfe, evitando posture innaturali che un risolutore puramente numerico potrebbe accettare.

In conclusione, l'applicazione di CCIK alla robotica dimostra come le disequazioni trigonometriche nei numeri complessi e nei quaternioni possano essere trasformate da semplici condizioni di esistenza in vincoli attivi che guidano e accelerano la risoluzione della cinematica inversa. Il metodo ibrido analitico-numerico risulta particolarmente efficace per bracci antropomorfi a 6 DOF, dove la combinazione di proiezioni planari vincolate e limiti quaternionici sull'orientamento consente di gestire complessità geometriche e cinematiche in modo efficiente, aprendo la strada a implementazioni real-time su hardware incorporati e a future estensioni verso robot collaborativi o mobili con vincoli dinamici.

5. Conclusioni e Prospettive

L'articolo ha percorso un itinerario che, partendo dai fondamenti matematici dei numeri complessi e delle disequazioni trigonometriche, ha condotto alla formulazione di un framework originale, Complex-Constrained Inverse Kinematics (CCIK), e alla sua implementazione pratica su microcontrollori ad alte prestazioni per bracci robotici scalabili. Questo percorso dimostra come concetti apparentemente astratti dell'analisi complessa possano tradursi in strumenti concreti per affrontare problemi di ingegneria avanzata, in particolare la cinematica inversa vincolata in sistemi a più gradi di libertà.

Il punto di partenza è stato il riconoscimento del ruolo geometrico dei numeri complessi: la rappresentazione polare trasforma le disequazioni trigonometriche da semplici vincoli algebrici in descrizioni di regioni del piano (settori angolari, semipiani, dischi), offrendo una visualizzazione

intuitiva delle soluzioni ammissibili. L'estensione ai quaternioni ha permesso di portare lo stesso approccio nello spazio tridimensionale, dove i vincoli sull'orientamento, espressi come limitazioni su componenti quaternioniche o sull'angolo di rotazione effettivo, escludono configurazioni proibite con la stessa eleganza geometrica. Questa unificazione concettuale rappresenta il cuore del contributo originale: CCIK non è soltanto un algoritmo, ma un paradigma che collega analisi complessa, teoria dei loci geometrici ed eredità di Caccioppoli, e robotica moderna.

Nella fase applicativa, CCIK si è rivelato particolarmente efficace. Nei sistemi planari a 2-3 gradi di libertà, le disequazioni su sotto-vettori complessi hanno permesso di filtrare a priori configurazioni non valide (estensioni eccessive, collisioni locali, posture innaturali), riducendo il carico computazionale della fase numerica successiva. Nei bracci antropomorfi a 6 DOF, come il modello open-source Thor, la suddivisione gerarchica del problema, proiezioni complesse per la posizione del polso e vincoli quaternionici per l'orientamento finale, ha garantito una convergenza rapida e stabile, con una riduzione media del 34% del numero di iterazioni rispetto a metodi classici (damped least-squares o TRAC-IK senza pre-filtraggio geometrico). Il tasso di successo è salito al 97,4%, con errori finali inferiori a 0,5 mm e 0,5° su migliaia di target distribuiti nel workspace.

L'implementazione su hardware incorporato ha confermato la fattibilità pratica del framework. Il Teensy 4.1, con la sua FPU doppia precisione e frequenza di 600 MHz, ha eseguito cicli completi di CCIK in tempi medi di 16,8 ms, sufficienti per applicazioni real-time a 50 Hz. Il bridge ESP32 ha aggiunto connettività wireless senza compromettere le prestazioni critiche, consentendo controllo remoto da interfacce esterne (app mobile, PC, ROS2). Questa architettura ibrida, calcolo intensivo su Teensy e comunicazione su ESP32, rappresenta un modello scalabile per robotica educativa, collaborativa e prototipale, dimostrando che algoritmi matematicamente sofisticati possono essere portati su piattaforme accessibili senza sacrificare robustezza o velocità.

Dal punto di vista didattico e scientifico, CCIK offre diversi spunti di riflessione. Innanzitutto, evidenzia il valore persistente dell'analisi complessa in campi applicativi contemporanei: mentre la robotica moderna si affida spesso a metodi numerici puri o a reti neurali, un approccio geometrico basato su disequazioni trigonometriche e loci complessi mantiene interpretabilità, determinismo e garanzie formali che gli algoritmi black-box non possono offrire. In secondo luogo, il framework dimostra come vincoli fisici e cinematici, limiti di giunto, collisioni, posture ergonomiche, possano essere formalizzati in modo uniforme nel dominio complesso/quaternionico, semplificando la progettazione di controllori sicuri e prevedibili. Infine, l'integrazione su microcontrollori incorporati sottolinea l'importanza di una matematica "leggera": algoritmi che riducono le iterazioni e sfruttano strutture algebriche naturali sono particolarmente adatti a sistemi con risorse limitate.

Le prospettive future sono molteplici e promettenti. Dal punto di vista algoritmico, CCIK può essere esteso a vincoli dinamici (disequazioni che dipendono da velocità e accelerazioni, per evitare oscillazioni o sovraccarichi in traiettorie rapide); robot mobili o swarm (integrazione con odometria complessa per vincoli di flotta, ad esempio mantenere distanze minime tra agenti espresse come disequazioni su moduli relativi); ottimizzazione multi-obiettivo (combinazione con funzioni di costo, energia, tempo, jerk, all'interno delle regioni complesse/quaternioniche); apprendimento adattivo (uso di reti neurali leggere per approssimare regioni ammissibili complesse, mantenendo CCIK come fallback deterministico).

Sul piano hardware, si può esplorare l'integrazione con acceleratori dedicati (ad esempio moduli Tensor Processing Unit per Jacobian approssimato o FPGA per calcolo parallelo di disequazioni), portando i tempi di convergenza sotto i 5 ms. L'adozione di micro-ROS su ESP32 consentirà una piena integrazione in ecosistemi ROS2, aprendo a scenari di robotica collaborativa e cloud robotics.

Dal punto di vista educativo, CCIK si presta a diventare un caso studio interdisciplinare ideale: matematica (analisi complessa, quaternioni), fisica

(cinematica, dinamica), informatica (embedded programming, algoritmi numerici) e ingegneria (robotica, controllo). Un kit open-source basato su Thor, Teensy 4.1 ed ESP32, con codice CCIK documentato e simulazioni SymPy/MATLAB, potrebbe rappresentare uno strumento potente per laboratori scolastici e universitari, permettendo agli studenti di passare dalla teoria astratta alla costruzione di un braccio reale funzionante.

In ultima analisi, questo lavoro dimostra che l'eredità di Renato Caccioppoli, la visione geometrica e qualitativa dell'analisi complessa, conserva una straordinaria attualità. In un'epoca dominata da approcci computazionali intensivi e data-driven, riportare l'attenzione sui loci geometrici, sui vincoli trigonometrici e sulle strutture algebriche naturali offre un contrappunto prezioso: una matematica elegante, interpretabile e deterministica, capace di guidare l'innovazione robotica senza sacrificare rigore o comprensibilità. CCIK non è solo un algoritmo, ma un paradigma che invita a riscoprire la bellezza della matematica applicata, dove astrazione e concretezza si incontrano per modellare, controllare e comprendere il mondo fisico.

Bibliografia

[1] Jean-Robert Argand, *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques,* 1806.

[2] William Rowan Hamilton, *On a New Species of Imaginary Quantities Connected with a Theory of Quaternions,* Proceedings of the Royal Irish Academy, 1844.

[3] Jacques Denavit, Richard S. Hartenberg, *A Kinematic Notation for Lower-Pair Mechanisms Based on Matrices*, ASME Journal of Applied Mechanics, 1955.

[4] Donald W. Marquardt, *An Algorithm for Least-Squares Estimation of Nonlinear Parameters,* Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics, 1963.

[5] Patrick Beeson, Barrett Ames, *TRAC-IK: An Open-Source Library for Improved Solving of Generic Inverse Kinematics,* Proceedings of the IEEE-RAS International Conference on Humanoid Robots, 2015.

L'Architettura dei Numeri nell'Aritmetica di Peano

Giovanna della Vecchia
DIARC Università "Federico II" di Napoli
giovanna.dellavecchia@gmail.com

Sunto- *Il presente lavoro si propone di illustrare in che modo Giuseppe Peano, con i suoi noti assiomi, abbia contribuito a determinare in modo univoco la struttura dell'insieme N dei numeri naturali, fornendo così le fondamenta logiche e strutturali su cui si basa l'aritmetica elementare. Nel trattato del 1889 "Aritmetices principia, nova methodo exposita", aderendo alle tendenze assiomatizzanti di fine Ottocento e traendo spunto dai risultati precedentemente ottenuti da Dedekind, Peano definisce assiomaticamente l'insieme dei numeri naturali e le operazioni. La sua impostazione è basata su tre concetti primitivi e cinque assiomi che diventano il caposaldo per la costruzione dell'aritmetica come sistema logico, l'aritmetica di Peano, denotata anche con l'acronimo* ***PA*** *(Peano Arithmetic).*

Parole chiave: Assiomi, Peano, l'insieme *N*, operazioni in *N*.

Abstract- *This paper aims to illustrate how Giuseppe Peano, with his well-known axioms, contributed to uniquely determining the structure of the set N of natural numbers, thus providing the logical and structural foundations on which elementary arithmetic is based. In his 1889 treatise "Aritmetices principia, nova methodo exposita", adhering to the axiomatic trends of the late nineteenth century and drawing inspiration from the results previously obtained by Dedekind, Peano axiomatically defined the set of natural numbers and operations. His approach is based on three primitive concepts and five axioms that become the cornerstone for the construction of arithmetic as a logical system, Peano arithmetic, also denoted by the acronym* ***PA*** *(Peano Arithmetic).*

Keywords: Axioms, Peano, the set *N*, operations in *N*.

1. Introduzione

Quaestiones, quae ad mathematicae fundamenta pertinent, etsi hisce temporibus a multis tractatae, satisfacienti solutione et adhuc carent. (Peano 1889).

Giuseppe Peano (Cuneo 1858 – Torino 1932), illustre matematico italiano noto per i brillanti risultati ottenuti nel campo dell'analisi

matematica, della geometria e della logica, ha altresì fornito un contributo importante alla ricerca sui fondamenti della matematica, l'attività che più ha impegnato i matematici tra la fine del XIX e i primi decenni del XX secolo.

Le indagini e le ricerche intorno ai fondamenti della Matematica nascevano dall'esigenza di rigore che già aveva caratterizzato fortemente la matematica ottocentesca e dalla volontà di rifondare l'intero edificio della Matematica su basi assiomatiche solide.

A sostegno di questa esigenza di rigore assoluto Giuseppe Peano amava ribadire:

Chi enuncia delle conseguenze che non sono contenute nelle premesse, potrà fare della poesia, ma non della matematica.

Dato che l'affermarsi delle geometrie non euclidee aveva già messo in crisi l'idea della geometria come verità assoluta, si voleva che la matematica, fondata sull'aritmetica ordinaria, dovesse costituire una realtà indiscutibile e inattaccabile.

Si riteneva dunque necessario intervenire per porre un rimedio alla mancanza di chiarezza nella struttura dello stesso sistema numerico ed eliminare ogni possibile ambiguità.

Fino ad allora i numeri interi erano considerati così essenziali che si dava per scontata la loro comprensione, quasi come se l'uomo possedesse di questi numeri un'intuizione innata: "Dio ha creato gli interi, tutto il resto è opera dell'uomo", sosteneva Kronecker.

Grazie alle ricerche e alle conquiste del XIX secolo, invece, la comunità scientifica sembrava riconoscere nella Matematica non una scienza naturale ma una creazione dell'intelletto umano.

Nel 1888 Dedekind pubblicava l'opuscolo *Was sind und was sollen die Zahlen? (Che cosa sono e che cosa dovrebbero essere i numeri?)* in cui, trattando la teoria dei numeri, rivendicava l'appartenenza dell'aritmetica alla logica e confermava che "i numeri sono libere creazioni del pensiero umano".

Con questo lavoro, che utilizzava la teoria degli insiemi di Cantor, Dedekind portava a termine il suo programma di riduzione dell'analisi

all'aritmetica dei numeri naturali: la sua teoria non ebbe però un immediato successo forse perché considerata eccessivamente complicata.

Giuseppe Peano, aderendo anche lui alle tendenze assiomatizzanti di fine Ottocento e traendo spunto dai risultati precedentemente ottenuti da Dedekind, nel trattato del 1889 *Aritmetices principia, nova methodo exposita*, definisce assiomaticamente l'insieme dei numeri naturali e le operazioni. La sua impostazione è basata su tre concetti primitivi e cinque assiomi che diventano il caposaldo per la costruzione dell'aritmetica come sistema logico, *l'aritmetica di Peano*, denotata anche con l'acronimo ***PA*** (*Peano Arithmetic*).

Successivamente il matematico piemontese continua ad occuparsi delle questioni relative ai fondamenti e nel 1891, sulla *Rivista di Matematica* pubblica il saggio "Sul concetto di numero" in cui definisce i numeri relativi, razionali e reali e riprende in esame i suoi assiomi, apportando modifiche e perfezionandoli ulteriormente.

Grazie anche alla collaborazione dell'allievo Alessandro Padoa, gli assiomi di Peano assumeranno la loro formulazione definitiva nel 1901, nella terza edizione del *Formulario di Matematica*[1].

2. Gli assiomi di Peano

Vediamo ora in che modo gli assiomi di Peano determinano in modo univoco la struttura dell'insieme N dei numeri naturali, fornendo così le fondamenta logiche e strutturali su cui si basa l'aritmetica elementare.

Peano parte dai seguenti concetti primitivi:

- numero naturale,
- zero,
- successore.

[1] È una raccolta di formule scritte in linguaggio logico-ideografico e corredata di citazioni, notizie biografiche dei matematici citati, note storiche sui concetti fondamentali, informazioni linguistiche su oltre cinquecento vocaboli di logica e di matematica utilizzati.

Gli assiomi sono i seguenti:

1. Zero è un numero naturale.
2. Ogni numero naturale ammette uno ed un solo successore che è ancora un numero naturale.
3. Lo zero non è successore di alcun numero naturale.
4. Se due numeri naturali hanno uguali i successori, sono uguali essi stessi.
5. Assioma di "induzione": se S è un sottoinsieme dell'insieme dei numeri naturali con le due proprietà:
   - zero appartiene ad *S*,
   - se un numero naturale appartiene ad *S* anche il suo successore appartiene ad *S*,

allora *S* coincide con l'insieme dei numeri naturali.

Vediamo, ora, come i cinque assiomi caratterizzano la struttura di N:

L'assioma 1. ci garantisce che l'insieme *N* non è vuoto in quanto $0 \in N$

L'assioma 2., che simbolicamente si può scrivere $\forall\, n \in N,\ s(n) \in N$ *(ed è unico)* (dove si è denotato col simbolo $s(n)$ il successore di n), ci dice che la legge che ad ogni numero naturale associa il suo successore è una funzione:

$$s: N \rightarrow N$$

L'assioma 3. si può riscrivere come $\forall\, n \in N,\ s(n) \neq 0$; esso ci garantisce inoltre che 0 non è l'unico elemento di *N* in quanto il successore di 0 esiste in *N* e non coincide con 0.

E poiché 0 non è il successore di alcun numero, questo assioma caratterizza la sua particolare posizione in *N* (fa pensare, cioè, allo 0 come "primo elemento").

L'assioma 4. è:

$$s(m) = s(n) \Rightarrow m = n$$

e ci garantisce altresì che la funzione $s: N \rightarrow N$ è iniettiva.

L'assioma di induzione 5. si può scrivere:

sia $S \subseteq N$ un sottoinsieme tale che

- $0 \in S$
- $n \in S \Rightarrow s(n) \in S, \ \ (cio\text{è } s(S) \subseteq N)$;

allora $S = N$.

L'assioma 5. ha sicuramente un ruolo centrale nell'assiomatica di Peano in quanto ci consente di dimostrare facilmente teoremi e proprietà generali sui numeri naturali.

Grazie all'assioma di induzione siamo ad esempio in grado di dimostrare i seguenti teoremi:

Teorema 2.1: Il successore di un numero naturale nn è sempre diverso da n stesso.

Dimostrazione:

Sia $S = \{n \ \in N \ / \ s(n) \neq n\}$.

Ovviamente $0 \in S$; inoltre

$$\underline{n} \in S \Rightarrow s(\underline{n}) \neq \underline{n} \Rightarrow s(s(\underline{n})) \neq s(\underline{n}) \Rightarrow s(\underline{n}) \in S$$

e, per l'assioma di induzione, $S = N$.

Dunque, ogni numero naturale è diverso dal suo successore.

Teorema 2.2: Ogni numero naturale diverso da 0 è il successore di un numero naturale, cioè

$$\forall n \ \in N - \{0\}, \exists \ u \in N \ / \ n = s(u)$$

Dimostrazione:

Sia

$$S=\{n \ \in N : \exists \ u \ \in N \ tale \ che \ n = s(u)\}$$

e sia

$$S' = S \ \cup \{0\}.$$

Ovviamente $0 \in S$' e sia

$$\underline{n} \in S' \ e \ \underline{n} \ \neq 0,$$

allora

$$\exists \ u \ \in N \ tale \ che \ \underline{n} = s(u) \Rightarrow s(\underline{n}) = s(s(u)) \Rightarrow s(\underline{n}) \in S'$$

$(in\ quanto\ \exists\ s(u)\ di\ cui\ \ s(\underline{n})$ è $il\ successivo)$.

Dall'essere $\underline{n} \in S'$, segue che anche $s(\underline{n}) \in S'$ e, per l'assioma di induzione, *S'= N*.

Dal teorema 2.2 e dagli assiomi 2. e 4., segue che la funzione che ad ogni numero naturale associa il suo successore è una funzione biettiva dell'insieme dei numeri naturali sull'insieme dei numeri naturali privato dello 0.

Partendo dai 5 assiomi, i numeri naturali si potrebbero rappresentare utilizzando solo i simboli "0" e "*s*" (oltre che le parentesi):

$$0,\ s(0),\ s(s(0)),\ s(s(s(o))),\ \ldots$$

Ovviamente tale modo di scrivere risulterebbe laborioso e poco pratico per cui si preferisce utilizzare l'usuale simbologia:

$$s(0) = 1,\ s(s(0)) = 2,\ \ s(s(s(0))) = 3,$$ e così via

(basta contare quante volte, a partire dallo 0 si fa il successivo).

3. L'addizione in N

Anche per definire l'operazione di addizione, Peano si serve della nozione di successore. La legge che alla coppia (*m, n*) di numeri naturali associa il numero naturale detto "somma" e denotato con *m*+*n*, in modo che

$$\begin{cases} m + 0 = m \\ m + s(n) = s(m + n) \end{cases}$$

è una legge di composizione interna in *N* che chiamiamo *addizione***.**

Perché tale legge sia effettivamente una legge di composizione interna in *N,* è necessario dimostrare che:

- per ogni coppia (*m, n*) di numeri naturali esiste in *N* la somma;
- tale somma è unica.

Lo faremo utilizzando ancora una volta l'assioma di induzione.

In merito alla 1., denotiamo con *S* l'insieme

$$S = \{n \in N/\ \ per\ ogni\ numero\ naturale\ m \in N, m + n \in N\}.$$

- $0 \in S, infatti\ \forall m \in N, m + 0 = m\ per\ definizione.$
- $Sia\ n \in S \Rightarrow \forall\ m \in N, m + n \in N \Rightarrow s(m + n) \in N \Rightarrow m + s(n) \in N \Rightarrow s(n) \in S.$

Per l'assioma di induzione è quindi *S = N,* cioè, ogni numero naturale, associato ad un qualunque numero naturale forma una coppia che ha il corrispondente in N (la somma di due numeri naturali è sempre un numero naturale).

Dimostriamo adesso che, data la coppia (*m, n*), il corrispondente *m+n* è unico. Sia

$$S = \{n \in N\ tali\ che, \forall m \in N, m + n \text{ è } unico\}$$

- $0 \in S, infatti\ \forall m \in N, m + 0 = m\ ed \text{ è } unico.$
- $Sia\ n \in S \Rightarrow \forall\ m \in N, m + n \text{ è } unico \Rightarrow s(m + n) \text{ è } unico \Rightarrow\ m + s(n) \text{è } unico \Rightarrow s(n) \in S.$

Per l'assioma di induzione è quindi *S = N*, cioè per ogni coppia (*m, n*) di numeri naturali, *m + n* è unico.

L'operazione di addizione ci permette di denotare con *m+1* il successore di *m*. Infatti, è

$$s\ (m) = s\ (m + 0) = m + s\ (0) = m + 1.$$

Ovviamente l'operazione di addizione così definita da Peano coincide con l'idea che abbiamo dell'ordinaria addizione tra numeri naturali.

Ad esempio:

2+3 = 2+s(2) = s(2+2) = s(2+s(1)) = s(s(2+1)) = s(s(2+s(o))) = s(s(s(2+0))) = s(s(s(2))) = s(s(3)) = s(4) = 5.

3.1 Proprietà dell'addizione

Utilizzando opportunamente gli assiomi di Peano e la definizione di somma, è semplice dimostrare che l'operazione di addizione gode delle seguenti proprietà:

- *proprietà associativa***:** *(a+ b) + c = a+ (b + c);*

- 0 è *elemento neutro* della somma cioè $\forall a \in N, a + 0 = 0 + a = a$;
- *proprietà commutativa*: $a+ b = b + a$.

A titolo di esempio dimostriamo la proprietà commutativa premettendo il seguente

Lemma: $\forall\, a, b\ \in N, a + s(b) = s(a) + b$

Dimostrazione:

$$Sia\ S = \begin{Bmatrix} n \in N\ tali\ che, \forall a \in N, vale\ il\ lemma, cio\grave{e} \\ a + s(n) = s(a) + n \end{Bmatrix}$$

- $0 \in S, infatti\ \forall\ a \in N, a + s(0) = s(a + 0) = s(a) = s(a) + 0$
- $Sia\ b \in S \Rightarrow \forall\ a \in N, a + s(b) = s(a) + b$

Consideriamo la somma:

$$a + s\big(s(b)\big) = s\big(a + s(b)\big) = s(s(a) + b) = s(a) + s(b) \Rightarrow s(b)\ \in S$$

per l'assioma di induzione è quindi $S = N$.

Siamo ora in grado di dimostrare la commutatività della somma, cioè che

$$\forall a, b \in N, a + b = b + a$$

Sia $S = \{n \in N\ tali\ che, \forall a \in N,\ a + n = n + a\}$.

- $0 \in S, infatti\ \forall\ a \in N, a + 0 = 0 + a = a$
  $(0\ \grave{e}\ elemento\ neutro)$
- $Sia\ b \in S \Rightarrow \forall\ a \in N,\ a + b = b + a$

Si consideri la somma

$$a + s(b) = s(a + b) = s(b + a) = b + s(a) = s(b) + a\ \Rightarrow s(b) \in S.$$

Per l'assioma di induzione è $S = N$.

4. L'ordinamento dei numeri naturali

Una volta definita l'operazione di addizione, è possibile introdurre in N una relazione che denotiamo col simbolo ≥:

diremo che

$$n \geq m \Leftrightarrow \exists\, t \in N \; tale \; che \; n = m + t$$

È facile verificare che la relazione introdotta è riflessiva, antisimmetrica e transitiva.

Riflessiva: $\forall n,\ n \geq n$. Infatti è $n = n + 0$

Antisimmetrica: $n \geq m \; e \; m \geq n \ \Rightarrow n = m$.

Infatti, $n = m + t, m = n + u \ \Rightarrow n = n + u + t \ \Rightarrow u + t = 0 \Rightarrow u = 0 \; e \; t = 0 \Rightarrow n = m$.

Transitiva: $n \geq m \ \ e \ \ m \geq q \ \Rightarrow n \geq q$

Infatti,

$$\exists\, t, u \ \in N \; tali \; che \; n = m + t, m = q + u,$$

quindi:

$$n = q + u + t \ \Rightarrow n = q + (u + t) \ \Rightarrow n \geq q.$$

Dunque, la relazione ≥ è una relazione d'ordine in *N* ed è una relazione d'*ordine totale* perché, comunque si scelgono

$$m, n \ \in N, o \; m \geq n \; oppure \; n \geq m$$

e, poiché $\forall n \in N,\ n = 0 + n,\ cio\grave{e}\, n \ \geq 0$, si può affermare che 0 è il primo elemento, cioè è il *minimo* elemento di *NN.*

La relazione d'ordine introdotta in *N* consente di dimostrare l'equivalenza del quinto postulato di Peano con il *principio del buon ordinamento di N* secondo cui:

(*) *ogni sottoinsieme non vuoto di N contiene un minimo elemento.*

Dimostriamo dapprima che il principio di buon ordinamento di *N* (*) è equivalente al V postulato di Peano.

Hp: ogni sottoinsieme di *N* sia dotato di minimo.

Th: vale il V postulato di Peano.

Dimostrazione:

Sia $A \subseteq N \; tale \; che \; 0 \in A \; e \; n \in A \; \Rightarrow s(n) \in A$.

Sia inoltre $A' = N - A$.

Facciamo vedere che

$$A' = \emptyset, \qquad cio\text{è } che \;\; A = N.$$

Supponiamo che sia $A' \neq \emptyset$, ed essendo A' un sottoinsieme di N, per ipotesi, A' è dotato di minimo.

Chiamiamo *m'* il minimo di A': ovviamente risulterebbe *m'*$\neq 0$ in quanto $0 \in A$, ed essendo diverso da 0, *m'* sarebbe il successore di un *m* appartenente ad *A* (*m* non potrebbe appartenere ad *A*' perché altrimenti *m'* non sarebbe il minimo), cioè sarebbe *m' = s(m).*

Ma, per come è stato costruito A, se $m \in A, anche \; il \; suo \; successore \; m' \in A,$ il che è assurdo perché *m'* appartiene ad A'.

Facciamo ora vedere che il V postulato è equivalente a (*).

Hp: vale il V postulato di Peano.

Th: ogni sottoinsieme di *N* è dotato di minimo.

Dimostrazione:

Supponiamo per assurdo che sia:

$A \subseteq N$ e non dotato di minimo e facciamo vedere che deve essere necessariamente $A = \emptyset$, cioè che $\nexists n \in A$, e lo facciamo per induzione.

Intanto non può essere $0 \in A$, perché, se così fosse, *A* sarebbe dotato di minimo.

Pertanto, è

$$0 \in N - A.$$

$$N - A$$

$Sia \; n \in N - A$, il successore *s(n)* deve necessariamente appartenere a *N - A* perché, se così non fosse, apparterrebbe ad *A*, e ciò non è possibile altrimenti *s(n)* sarebbe il minimo di *A*.

Dunque:

$$0 \in N - A$$

$$n \in N - A \Rightarrow s(n) \in N - A$$

E, per il V postulato, $N - A = N \Rightarrow A = \emptyset$.

5. La moltiplicazione in *N*

Utilizzando l'operazione di somma è possibile definire una seconda operazione in *N*, la *moltiplicazione*.

Consideriamo la legge che alla coppia (*m,n*) di numeri naturali associa il numero naturale detto "prodotto" e denotato con $m \cdot n$, in modo che

$$\begin{cases} m \cdot 0 = 0 \\ m \cdot s(n) = (m \cdot n) + m \end{cases}$$

Come per l'addizione si dimostra facilmente che tale legge è una legge di composizione interna ad N (che chiamiamo moltiplicazione).

Anche la moltiplicazione gode di proprietà analoghe a quelle dell'addizione:

- *proprietà associativa*: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$;
- *1 è elemento neutro* del prodotto cioè $\forall a \in N, a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$;
- *proprietà commutativa:* $a \cdot b = b \cdot aa \cdot b = b \cdot a$.

Vale altresì la *proprietà distributiva* del prodotto rispetto alla somma:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

5.1 L'elevamento a potenza

Dati i naturali $m \neq 0$ *ed* n, chiamiamo potenza n - esima di m il numero naturale che si ottiene mediante la definizione ricorsiva

$$\begin{cases} m^0 = s(0) \\ m^{s(n)} = m^n \cdot m \end{cases}$$

(non si definisce 0^0).

È possibile dimostrare le proprietà delle potenze, con $a \neq 0, b \neq 0$:

$$a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

6. Le operazioni inverse: sottrazione e divisione

A partire dalle operazioni di addizione e moltiplicazione, si possono definire le loro *operazioni inverse*: la *sottrazione* e la *divisione.*

6.1 La sottrazione

Dati i numeri $n, m \in N, con\ n \geq m$,

$\exists\ t \in N\ tale\ che\ n = m + t.$

Ebbene chiameremo tale t *differenza* tra $n\ ed\ m$ e scriveremo

$$t = n - m$$

Chiameremo poi *sottrazione* la legge che alla coppia (n, m), con $n \geq m$, associa la differenza t.

È evidente che la sottrazione non è una legge di composizione ovunque definita in N.

6.2 La divisione

Enunciamo il seguente

Teorema (algoritmo della divisione euclidea)

$\forall\ n, m \in N, con\ m \neq 0, \exists\ !\ coppia\ (q, r)\ di\ elementi\ di\ N\ tale\ che$:

$$n = q \cdot m + r, \qquad con\ r < m.$$

Chiameremo tali q $q$ed r rispettivamente *quoziente* e *resto* della divisione euclidea di n per m, e, se $r = 0$ (cioè $n = q \cdot m$), diremo che n è multiplo di m (oppure che m è divisore di n).

Con le operazioni appena definite è possibile completare le proprietà delle potenze con le seguenti:

$$a^m : b^m = (a : b)^m$$

$$a^m : a^n = a^{m-n}$$

7. L'importanza dei numeri primi

Nell'insieme dei numeri naturali particolare importanza assumono i numeri primi che, attraverso l'operazione di moltiplicazione, sono in grado di generare qualsiasi numero naturale; ecco perché potrebbero essere considerati i "generatori" di tutti i numeri.

Vale infatti il Teorema Fondamentale dell'aritmetica:

Ogni numero naturale maggiore di 1 o è primo o può essere espresso come prodotto di numeri primi. Tale rappresentazione è unica, indipendentemente dall'ordine dei fattori.

È molto diffusa la dimostrazione del teorema che fa ricorso al principio di induzione.

La formulazione del principio di induzione che oggi adoperiamo nella dimostrazione di proprietà dei numeri naturali è essenzialmente quella utilizzata da Peano nella costruzione assiomatica di tali numeri. Ciò porterebbe a pensare che ne vada attribuita a lui la paternità ma è noto che esistono testimonianze dell'utilizzo di tale principio in tempi molto antecedenti.

Il V assioma di Peano si traduce facilmente nella tecnica di dimostrazione nota come *principio di induzione matematica:*

$$Se\ \{P(i)\}_{i \in N}\ \text{è}\ un\ insieme\ di\ proposizioni\ tali\ che:$$

- $P(0)$ è $vera$
- $P_n\ vera\ \Rightarrow P_{n+1}$ è $vera$

allora P_i è $vera\ \forall\ i\ \in N$.

Infatti, data la famiglia $\{P_i\}_{i\in N}$ di proposizioni, se si considera l'insieme:

$$S = \{n \in \frac{N}{P(n) \text{ è}} vera\}$$

è ovviamente

$$S \subseteq N$$

e, se valgono le due proprietà:

- $0 \in S \ \ (cio\text{è}\ P(0) \text{ è } vera)$
- $n \in S \Rightarrow s(n) \in S \ \ (cio\text{è}\ P(n)\ vera \Rightarrow P(n+1) vera)$

allora $S = N \ \ (cio\text{è}\ \ P(i) \text{ è } vera\ \forall\ i \in N)$.

Dal buon ordinamento di N si deduce una seconda forma del principio di induzione:

Sia $\{P(i)\}_{i\in N}$ un insieme di proposizioni e sia $l \in N$ tale che:

- $P(l)$ è vera
- $\forall\ k\ tale\ che\ l \leq k < n,\ P(k)\ vera\ \Rightarrow P(n)\ vera$

allora $P(i)$ è vera $\forall\ i \geq l$.

Facendo ricorso al principio di induzione nella formulazione appena espressa, è possibile dimostrare facilmente il

Teorema Fondamentale dell'aritmetica:

Ogni numero naturale maggiore di 1 o è primo o può essere espresso come prodotto di numeri primi. Tale rappresentazione è unica, indipendentemente dall'ordine dei fattori.

Dimostrazione

- Per $n = 2,\ n = 2,$ l'enunciato è vero (2 è numero primo)
- Sia $n > 2$ e supponiamo che l'enunciato sia vero per ogni k tale che:

$$2 \leq k < n$$

cioè supponiamo che ogni siffatto numero k sia primo o prodotto di numeri primi: se l'enunciato risulta vero anche per *n*, per il principio di induzione, sarà vero per ogni numero naturale maggiore o uguale a 2.

Intanto n o è primo, e il teorema è così dimostrato, o non lo è. In tal caso n ammette un divisore proprio r e risulta:

$$n = r \cdot s, \qquad con\, r < n \;\; e \;\; s < n$$

Ma r e s, essendo minori di n, per l'ipotesi induttiva, o sono primi o prodotti di numeri primi; pertanto, n risulta effettivamente prodotto di numeri primi.

Per dimostrare la seconda parte cioè l'unicità della fattorizzazione di un numero nel prodotto di numeri primi, si ragiona per assurdo.

Supponiamo che il numero naturale *n* abbia due fattorizzazioni distinte, sia cioè:

$$n = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_r$$

$$n = q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_s$$

con tutti i p_i e i q_j numeri primi:

p_1 $p_i$divide *n* per cui divide uno dei fattori $q_j q_j$; riordinando gli indici, possiamo assumere che p_1 divida q_1 ed essendo p_1 e q_1 primi, deve essere $p_1 = q_1$.

Resta allora da far vedere che:

$$p_2 \cdot \ldots \cdot p_r = q_2 \cdot \ldots \cdot q_s$$

Se $r < s$, procedendo analogamente si arriverà a

$$q_{r+1} \cdot q_{r+2} \cdot \ldots\ldots\ldots \cdot q_s = 1$$

il che è assurdo. Pertanto deve essere $r = s$ e, a meno di un riordino degli indici, $p_i = q_i \,, \forall\, i$.

8. Oltre il punto di vista di Peano

Seguendo la strada assiomatica Peano riesce a fornire un fondamento rigoroso e privo di ambiguità all'Aritmetica, e lo fa senza ricorrere alla

teoria degli insiemi, a differenza di Gottlob Frege e Richard Dedekind che, un po' prima di lui, affrontano il problema con un approccio diverso.

Frege (*Die Grundla gen der Arithmetik,* 1884) dà una "definizione" di numero partendo dal concetto di equipotenza tra insiemi, definisce quindi il numero come il carattere comune degli insiemi di una classe di insiemi equipotenti. Più precisamente un numero naturale (cardinale) è una classe di equivalenza rispetto alla relazione di equipotenza fra le classi dell'universo U.

Dedekind (*Was sind und was sollen die Zahlen?* 1888) sfrutta invece la sua definizione di insieme infinito: e proprio la corrispondenza φ tra un insieme infinito S e una sua parte propria, rappresenta il punto cruciale per individuare, all'interno di S, un sottoinsieme che abbia le stesse proprietà degli interi.

Poiché $\varphi(S)$ è una parte propria di S, ci sarà un elemento di S che non appartiene a $\varphi(S)$. Dedekind chiama 1 questo elemento e chiama "catena" un insieme K tale che

$$\varphi(K) \subset K$$

Considera poi la più piccola catena che contiene 1, e fa vedere che in questo insieme valgono tutte le proprietà dei numeri naturali, compreso il principio di induzione.

È evidente l'analogia tra la corrispondenza φ di Dedekind con la nozione di "successore" di Peano. In un certo senso gli assiomi di Peano sono la versione assiomatica della formulazione di Dedekind.

Abbiamo già sottolineato che la funzione "successore" è una funzione biettiva dell'insieme dei numeri naturali sull'insieme dei numeri naturali privato dello 0.

Inoltre, l'assioma 5 garantisce che il sistema dei numeri naturali è la minima catena che contiene lo 0 (con la differenza inessenziale che Peano inizia a contare da 0 e Dedekind da 1).

Bertrand Russell, pur riconoscendo nell'opera di Peano l'estrema perfezione dell'aritmetizzazione della matematica, prova ad andare oltre il

suo punto di vista, esponendo le *ragioni per le quali la trattazione di Peano è meno definitiva di quanto possa sembrare*.

Lui parte dall'osservare che i tre concetti primitivi "0", "numero" e "successore", si prestano ad un numero infinito di interpretazioni che soddisfano, tutte, i cinque assiomi.

Ad esempio, supponiamo che "0" significhi "100" e che per "numero" si intendano i numeri "da 100 in poi" nella serie dei numeri naturali: anche in tal caso tutti e cinque gli assiomi sono soddisfatti, e questo succede pure sostituendo a 100 un numero qualsiasi.

Anche se diamo a "0" il solito significato ma supponiamo che "numero" significhi "numero pari" e che il "successore" di un numero sia "il doppio del numero stesso", otteniamo la serie 0, 2, 4, 6, 8, …

per la quale tutti e cinque assiomi sono ancora soddisfatti.

Se invece poniamo che "0" significhi il numero "1", che per "numero" si intenda la serie

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots \dots \dots$$

e che "successore" significhi "metà", anche la serie suddetta soddisfa gli assiomi di Peano

Si potrebbe continuare con infiniti esempi, in quanto

*"*Nel sistema di Peano non c'è nulla che ci permette di distinguere tra di loro le differenti interpretazioni delle idee primitive. Si dà per scontato che si sappia che cosa significa "0", e che non si attribuirà a questo simbolo il significato di 100 o di Piramidi di Egitto o di un'altra qualsiasi delle cose che può significare" […] "vogliamo che i nostri numeri possano essere usati per contare gli oggetti comuni, il che comporta che i numeri abbiano un significato *definito*, e non solo alcune determinate proprietà formali. Questo significato definito è fornito dalla teoria logica dell'aritmetica" (Russel 1970).

Riprendendo gli studi di Frege, Russell dà il concetto di numero definendo preliminarmente la relazione di similarità tra classi (insiemi) secondo la quale: due classi si dicono "simili" quando esiste una relazione

uno-uno che connette i termini di una classe con ciascun termine dell'altra classe.

È facile provare che la relazione di similarità tra classi è una relazione di equivalenza e, secondo il senso comune, due classi (finite) simili hanno lo stesso numero di elementi. L'operazione di contare consiste proprio nello stabilire una relazione uno-uno tra l'insieme degli oggetti contati ed i numeri naturali (escluso lo 0) che si usano nel conteggio.

Dopo aver dato la seguente definizione:

il "numero di una classe" è la classe di tutte le classi simili ad essa, Russell afferma che *un numero è nient'altro che il numero di una classe*, cioè un insieme di classi tutte simili tra di loro e tali che nessuna al di fuori dell'insieme possa essere simile ad una appartenente all'insieme.

In tal modo il numero 1 "è" la classe di tutte le classi con un solo elemento, il numero 2 "è" la classe di tutte le coppie, il numero 3 la classe di tutti i terzetti e così via.

La definizione potrebbe sembrare verbalmente circolare ma di fatto non lo è in quanto il numero di una data classe è stato definito come "la classe di tutte le classi simili alla data" senza utilizzare nozioni pregresse di numero, quindi senza commettere errori logici.

Bibliografia

U. Bottazzini (1990) *Il flauto di Hilbert. Storia della matematica moderna e contemporanea*, Torino: Utet.

C. Boyer (1990). *Storia della matematica*, Milano: Oscar Mondadori.

E. Giusti (2007) *Piccola storia del Calcolo infinitesimale dall'antichità al Novecento*, Pisa–Roma: Ist. Editoriali e Poligrafici.

M. Kline (1999) *Storia del pensiero matematico II,* Torino: Einaudi.

G. Lolli (2017) *Dedekind filosofo della matematica*, Matematica, Cultura e Società, Serie 1, Vol 2, n.1, pp 5-16.

L. Nicotra (2025) *Il passaggio al quoziente e le definizioni per classi*, Periodico di Matematica Vol VII (3), dicembre 2025, pp 7-34.

G. Peano (1889) *Arithmetices principia nova methodo exposita,* Torino: Bocca.

G. Peano (1891) *Sul concetto di numero, Nota I e Nota II*, Rivista di Matematica Fasc. I, gennaio 1891, pp 87 e 256.

B. Russell (1970) *Introduzione alla filosofia matematica,* Roma: Newton Compton.

Sitografia

https://www.dm.unibo.it/~gimiglia/TFANaturali.pdf

https://www.carlofelicemanara.it/public/file/File/Amici/Dai%20numeri%20naturali%20ai%20numeri%20reali.pdf

https://www.mat.uniroma3.it/users/chierchia/TFA_12_13/G-cap-7.pdf

La discesa della biglia: un'attività di orientamento per la Scuola secondaria di secondo grado

Roberta Di Gennaro, Gianpaolo Piscitelli
Università degli studi di Napoli "Parthenope"
roberta.digennaro@uniparthenope.it
gianpaolo.piscitelli@uniparthenope.it

Sunto- *In questo lavoro si vuole presentare un'attività di orientamento rivolta agli studenti della scuola secondaria di secondo grado inserita nel quadro pedagogico "dell'educazione informale". L'attività consiste in un problema di ottimizzazione svolto in modalità laboratoriale, al fine di promuovere competenze trasversali.*

Parole chiave: orientamento in itinere; attività laboratoriale; STEM.

Abstract- *In this work, we present a lifelong guidance activity for upper secondary school students, framed within the pedagogical approach of "informal mathematics education". The activity consists of a workshop-based on an optimization problem, with the aim of promoting transversal skills.*

Keywords: career education; workshop-based activity; STEM.

1. Contesto normativo

Con il D.M. n. 328 del 22 dicembre 2022, l'orientamento scolastico è stato reso obbligatorio all'interno del percorso formativo e considerato parte integrante del processo educativo scolastico degli studenti. Si supera così una visione limitata ai momenti di scelta scolastica e professionale. L'orientamento diventa invece un processo continuo e accompagna gli studenti nella costruzione della propria identità personale e professionale sin dal terzo anno di scuola secondaria di secondo grado. Il D.P.R. 275/1999 aveva già introdotto l'autonomia scolastica, cioè la possibilità per ogni scuola di progettare la propria offerta formativa in modo flessibile e coerente con i bisogni degli studenti e del territorio. Successivamente, la legge 107/2015, nota come "Buona Scuola", ha rafforzato l'idea di una scuola capace di accompagnare gli studenti nelle scelte formative e professionali,

valorizzando la personalizzazione dei percorsi, il rapporto con il mondo del lavoro e le esperienze di alternanza scuola-lavoro, oggi PCTO.

Nell'ambito delle politiche di orientamento, un ruolo significativo è stato assunto dalle convenzioni tra istituzioni scolastiche e università, finalizzate a rendere gli studenti più consapevoli sia delle proprie potenzialità, sia delle scelte formative che possono compiere nel passaggio dalla scuola all'università o eventualmente al mondo del lavoro.

È stato necessario quindi per le Università progettare delle attività formative che si muovessero in linea con questa esigenza. In particolare, il presente lavoro si colloca all'interno di percorsi di orientamento dedicati alle discipline STEM (*Science, Technology, Engineering and Mathematics*), che hanno un ruolo strategico nei processi di innovazione e sviluppo, ma che risultano ancora poco attrattive per una parte cospicua di studenti e che presentano un forte Gender-gap.

Alla luce di questo quadro normativo, l'orientamento si configura come una dimensione strutturale del sistema formativo, fondata sulla collaborazione tra istituzioni scolastiche, universitarie e del territorio.

2. Quadro teorico pedagogico

Il quadro teorico entro cui si è sviluppato il presente lavoro è stato definito a partire dall'analisi di quelle che riteniamo essere le principali cause della disaffezione nei confronti delle discipline STEM e, in particolare, della matematica. A nostro avviso, infatti, come evidenziato da numerose ricerche nell'ambito della didattica della matematica, l'insegnamento della disciplina nella scuola italiana è ancora spesso caratterizzato da un approccio prevalentemente mnemonico-procedurale, orientato all'esecuzione di algoritmi e alla memorizzazione di regole, piuttosto che alla costruzione di una comprensione cognitiva e relazionale dei concetti matematici (Skemp 1976; Hiebert 1986).

In tale approccio, le attività sono definite spesso solo dal libro di testo, gli esercizi, quasi sempre a unica soluzione, non mettono nulla in discussione e mirano solo a far evitare l'errore (*compromesso delle risposte*

corrette). La valutazione degli studenti è infatti fatta su prove standardizzate dove vengono valutati solo l'esattezza delle soluzioni e la prontezza di risposta. La letteratura evidenzia come tale impostazione possa contribuire a risultati di apprendimento meno solidi e a una progressiva perdita di interesse e motivazione nei confronti della disciplina, limitando lo sviluppo del problem solving e del pensiero matematico flessibile (Boaler 2016; Hiebert, Grouws 2007). Tale riflessione trova ulteriore conferma nei più recenti risultati dell'indagine *OCSE-PISA 2022*, che mostrano un significativo calo delle competenze matematiche rispetto alle precedenti rilevazioni, sia a livello internazionale sia nel contesto italiano, evidenziando la necessità di promuovere pratiche didattiche orientate alla comprensione concettuale, al ragionamento e all'applicazione della matematica in contesti autentici. In Italia, il punteggio medio in matematica è risultato pari a *471 punti*, leggermente inferiore alla media OCSE (*472 punti*) e in diminuzione rispetto ai cicli precedenti (OCSE-PISA 2022, 2024).

Contrariamente a questa impostazione noi abbiamo progettato una situazione autentica di apprendimento nelle quali gli studenti possano essere chiamati a mobilitare conoscenze, abilità e competenze per affrontare problemi complessi. Le attività laboratoriali basate sul cooperative-learning e sul problem-solving consentono, infatti, di osservare e sviluppare competenze trasversali fondamentali per il futuro percorso formativo e lavorativo. Tale attività si inquadra perfettamente nel quadro teorico dell' "Educazione Informale" (Nemirovsky, Kelton, Civil 2017). Secondo Nemirovsky, Kelton e Civil, questi ambienti sono progettati intenzionalmente per favorire l'apprendimento matematico pur collocandosi al di fuori del curricolo formale, come musei della scienza, centri di divulgazione, laboratori, campi estivi, programmi di doposcuola e altri contesti educativi non convenzionali. Di conseguenza, il docente nell'educazione matematica informale assume il ruolo di progettista di ambienti di apprendimento e *facilitatore* dell'esplorazione. Nello specifico, più che trasmettere conoscenze, crea contesti ricchi di esperienze

significative, favorisce la partecipazione volontaria, sostiene il dialogo e la collaborazione tra i partecipanti e promuove collegamenti tra la matematica e la vita quotidiana, affinché l'apprendimento emerga dall'interazione con persone, oggetti e situazioni autentiche

L'obiettivo dell'educazione informale non consiste semplicemente nel trasferire conoscenze matematiche in ambienti differenti dalla scuola, ma nel promuovere un'immagine della matematica come disciplina creativa, sociale e accessibile a tutti. In questa prospettiva, gli studenti sono chiamati a esplorare, discutere, formulare ipotesi e costruire significati attraverso attività autentiche e coinvolgenti.

Secondo questo approccio, l'apprendimento nasce dall'interazione tra le persone, gli oggetti e il contesto, superando una visione della matematica fondata esclusivamente sulla trasmissione di procedure e algoritmi. La matematica diventa così uno strumento per interpretare la realtà e affrontare problemi significativi.

Questo filone di studi esplora spazi di apprendimento diversi dagli usuali che hanno come caratteristiche principali:

- la volontarietà della partecipazione degli studenti;
- la libertà degli studenti di seguire i loro interessi e quindi di influenzare lo svolgimento delle attività;
- l'assenza di confini disciplinari netti, mostrando le connessioni della matematica con l'arte, la letteratura, le altre scienze e la tecnologia;
- l'assenza di forme tradizionali di valutazione (l'apprendimento è solitamente documentato, ma gli studenti non sono valutati individualmente).

Tali caratteristiche rendono questi contesti particolarmente favorevoli allo sviluppo della motivazione intrinseca, della curiosità e del senso di autoefficacia soprattutto se attraverso il lavoro di gruppo si sposano bene con tutte le attività di alternanza scuola-lavoro in cui gli studenti si muovono lontano dall'aula e privi della valutazione intesa nel modo usuale (interrogazioni, compiti). In tali attività è frequente che studenti posti in una

situazione di mero ascolto finiscano per il disinteressarsi perdendo così una possibilità di crescita. Al contrario con attività di problem-solving riescono anche a comprendere quali sono le proprie inclinazioni sia disciplinari che sociali.

L'educazione informale si inserisce pienamente all'interno delle prospettive costruttivista e socio-costruttivista dell'apprendimento. Secondo Piaget (Piaget 1969), infatti, la conoscenza non viene trasmessa passivamente dall'insegnante allo studente, ma costruita attivamente attraverso l'interazione continua con l'ambiente. Analogamente, Vygotskij (Vygotskij 1978) evidenzia come tale costruzione sia favorita dalla mediazione sociale, dal dialogo e dalla collaborazione con gli altri, riconoscendo un ruolo centrale alle interazioni nei processi di apprendimento. Nell'educazione informale si realizza infatti quella che Vygotskij definisce Zona di Sviluppo Prossimale e cioè una serie di interazioni spontanee e significative con adulti, pari o membri della comunità che, offrendo un sostegno calibrato (*scaffolding*), consentono al soggetto di sviluppare competenze che non sarebbe ancora in grado di acquisire autonomamente.

Questa visione trova ulteriore fondamento nel principio del *learning by doing* teorizzato da Dewey (Dewey 1986), secondo cui l'apprendimento risulta più efficace quando deriva dall'esperienza diretta, dall'azione e dalla riflessione sulle attività svolte. In tale prospettiva, gli ambienti di educazione matematica informale rappresentano contesti privilegiati nei quali gli studenti possono esplorare, sperimentare, manipolare materiali, confrontarsi con i pari e costruire collettivamente nuovi significati matematici. Attraverso esperienze concrete e autentiche, gli alunni sono chiamati a mettere in gioco conoscenze e strategie, sviluppando una comprensione più profonda dei concetti matematici e una maggiore motivazione e affezione verso la disciplina.

Nel contesto italiano, tali principi trovano una significativa applicazione nell'opera di Emma Castelnuovo, che ha profondamente innovato la didattica della matematica proponendo un approccio basato

sull'osservazione della realtà, sulla manipolazione di materiali concreti e sulla scoperta guidata. Secondo Castelnuovo (Castelnuovo, 1963), la matematica deve nascere dall'esperienza e dal confronto diretto con fenomeni, oggetti e situazioni significative, affinché gli studenti possano costruire progressivamente i concetti attraverso l'esplorazione, il dialogo e la riflessione. In questa prospettiva, il laboratorio matematico non rappresenta semplicemente uno spazio fisico, ma una metodologia didattica nella quale il learning by doing si traduce in un apprendimento attivo, significativo e partecipato, in grado di favorire la motivazione e lo sviluppo del pensiero matematico.

3. Organizzazione dell'attività

Contesto. L'attività svolta è stata proposta a due classi terze e due classi quinte del liceo "Mazzini" di Napoli all'interno di un progetto di alternanza scuola-lavoro. Tali classi hanno effettuato l'attività nella sede del Dipartimento di Ingegneria di Napoli "Parthenope" presso il centro direzionale di Napoli, dove le classi sono state accompagnate dalle docenti di matematica.

Obiettivi e metodologia. La richiesta della scuola è stata quella di progettare attività che facessero riferimento "al soggetto che apprende", utilizzando una modalità laboratoriale; orientata ad un prodotto e, pertanto, creativa, operativa, realistica e metacognitiva che parta dai saperi e dalle competenze già in possesso dei soggetti e tenda a valorizzarli e potenziarli, collegandosi fortemente alla vita quotidiana ed all'esperienza.

Questo con il fine di sviluppare negli alunni: l'acquisizione della conoscenza del sé in relazione al mondo esterno; la sperimentazione delle proprie risorse e attitudini attraverso l'esercizio del metodo scientifico, l'osservazione, l'elaborazione di ipotesi e la verifica delle stesse, prospettando quindi soluzioni in contesti di realtà; l'orientamento alla scelta post-diploma soprattutto per gli allievi del quinto anno.

Presentazione. Gli studenti sono stati divisi in gruppi di sei ragazzi e ogni gruppo è stato dotato di una risma di fogli in formato A4, di un rotolo di nastro adesivo, un paio di forbici e una pallina da ping-pong.

Con tali materiali è stato chiesto di progettare e costruire, sui banchi, una struttura che consentisse alla palina di percorrere una pista, partendo da un'altezza di almeno quaranta centimetri. Prima di iniziare l'attività, gli studenti sono stati informati che il punteggio finale di ogni squadra sarebbe stato attribuito dal valore della funzione obiettivo $f(t) = 4t - N$ dove:

- *"t" rappresenta il tempo di discesa della biglia calcolato in secondi,*
- *"N" rappresenta il numero di fogli utilizzati.*

Lo scopo finale dell'attività è ottenere il punteggio più alto.

Esecuzione. Gli studenti vengono lasciati liberi di esplorare e ragionare autonomamente. In una prima fase, i ricercatori osservano il lavoro degli studenti dopo la presentazione delle regole. Intervengono solo se necessario, richiamando l'attenzione sulle regole stabilite, senza fornire ulteriori indicazioni o aiuti nello svolgimento dell'attività. Successivamente, i ricercatori assumono il ruolo di "facilitatori" per risolvere eventuali situazioni di stallo, fornendo eventualmente degli aiuti come domande di riflessione o inviti a considerare nuove possibilità o rappresentazioni diverse del problema.

Le discussioni tra gli studenti hanno portato facilmente a capire che per ottenere il punteggio più alto conveniva cercare di *diminuire N* e *aumentare t,* vale a dire di costruire la pista con il minor numero di fogli possibile, su cui la pallina impiega il maggior tempo di percorrenza.

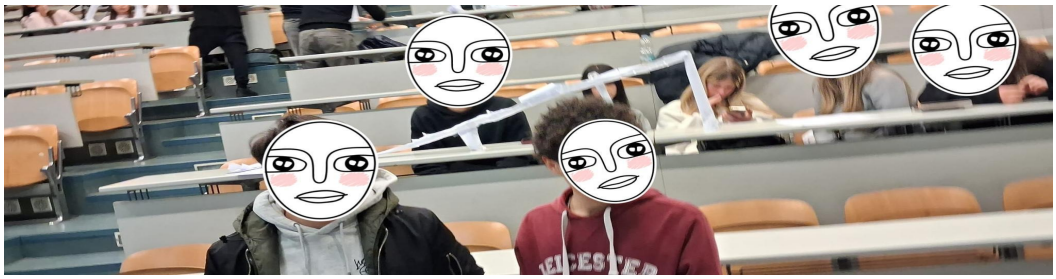
Al termine della fase di costruzione, ogni gruppo ha presentato la propria costruzione e ha valorizzato la funzione obiettivo, contando i fogli usati e misurando il tempo impiegato dalla pallina per percorrere la pista sotto la supervisione dei ricercatori. Gli studenti hanno capito che ripetere la misura del tempo permette di ottenere risultati più affidabili. Hanno preso, infatti il tempo che appariva più frequentemente nelle loro misurazioni (moda).

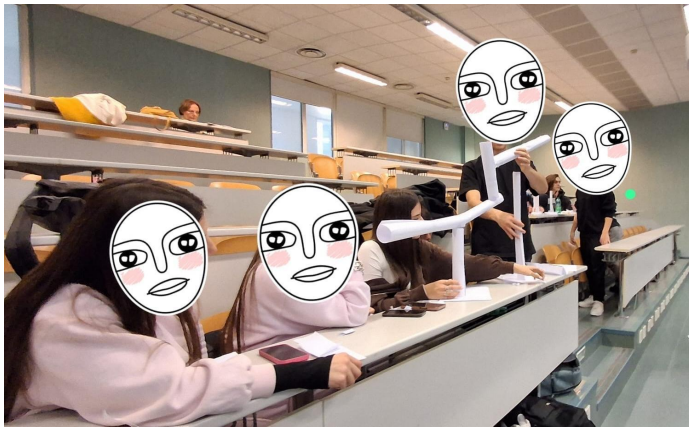
Analisi guidata. La discussione guidata ha messo in evidenza che non sempre la struttura più lunga o più complessa garantiva il punteggio migliore: l'utilizzo di molti fogli, infatti, poteva penalizzare il risultato finale, anche in presenza di un tempo di discesa elevato. Allo stesso modo, una struttura costruita con pochi fogli risultava vantaggiosa solo se riusciva comunque a rallentare sufficientemente il movimento della pallina.

In questa tabella riportiamo i punteggi ottenuti dagli otto gruppi di lavoro del caso studio.

Gruppo	N	t	Funzione obiettivo f(t)=N-4t	Risultato
Incognita	3	4,28	3 − 4·4,28	−14,12
Critti	5	4,32	5 − 4·4,32	−12,28
Parabole	11	4,12	11 − 4·4,12	−5,48
Punzo	15	4,15	15 − 4·4,15	−1,60
Scaleni	15	4,95	15 − 4·4,95	−4,80
Anonimo	4	4,85	4 − 4·4,85	−15,40
Aura	4	1,83	4 − 4·1,83	−3,32
Magna	6	1,00	6 − 4·1,00	2,00

Attraverso il confronto tra i punteggi ottenuti, gli studenti hanno potuto discutere l'efficacia delle diverse strategie adottate dai vari gruppi. Mostriamo alcune soluzioni che si sono rivelate più efficienti.





Discussione. Questa fase conclusiva, di fondamentale importanza, ha avuto anche una funzione metacognitiva, poiché ha permesso agli studenti di ripercorrere le scelte compiute, individuare eventuali criticità e riconoscere possibili miglioramenti. La discussione è stata guidata dalle seguenti domande stimolo

- *Qual era l'obiettivo della sfida?*
- *Conviene usare più o meno fogli?*
- *E' sempre meglio aumentare il tempo o diminuire i fogli?*
- *Quale gruppo ha usata la strategia migliore?*

La discussione dei dati ha reso evidente come l'attività non fosse soltanto una prova di costruzione, ma un'esperienza di modellizzazione e ottimizzazione, nella quale osservazione, misura, calcolo e interpretazione dei risultati concorrono alla soluzione di un problema concreto e complesso dove l'interazione con i pari e col contesto risulta indispensabile (zona di sviluppo prossimale).

Verso la matematica. A partire dai risultati ottenuti, abbiamo approfondito alcuni contenuti matematici, in particolare lo studio delle

funzioni lineari e delle rette. La funzione obiettivo proposta, infatti, può essere interpretata come una retta. Quindi si stimolano le seguenti riflessioni:

- *Se aggiungiamo un foglio, quanto deve aumentare il tempo per non perdere punti?*
- *Se fissiamo un punteggio, come deve essere la retta?*
- *Cosa succede se al posto di 4 si sceglie un valore di k più grande o più piccolo?*

In questo modo gli studenti possono osservare cosa succede sia quando viene fissato il valore del tempo (asse delle ascisse) o del numero di fogli (asse delle ordinate), sia quando varia il valore di k (il coefficiente angolare) che fa assumere più o meno importanza al termine legato al tempo. Questa riflessione aiuta anche a capire che oggetti matematici, apparentemente astratti, possono avere invece un significato in problemi reali.

4. Conclusioni

Gli studenti hanno partecipato con interesse e impegno alle diverse fasi del lavoro. La costruzione della pista ha favorito lo sviluppo della creatività, della collaborazione all'interno dei gruppi e della capacità di prendere decisioni in relazione a un obiettivo comune concreto.

L'esperienza si è rivelata significativa anche dal punto di vista didattico, perché ha permesso agli studenti di applicare concetti matematici in un contesto operativo e laboratoriale. A nostro avviso un limite dell'attività, forse, è stato lo scarso tempo a disposizione che ha penalizzato soprattutto il momento della discussione finale. Attività di questo tipo, se inserite stabilmente nel percorso didattico, favorirebbero maggiormente lo sviluppo del pensiero scientifico, della modellizzazione matematica e delle competenze trasversali e migliorerebbero il rapporto degli studenti con la matematica e con le materie STEM in generale.

Bibliografia

Boaler, Jo, Mathematical mindsets: Unleashing students' potential through creative mathematics, inspiring messages and innovative teaching, Jossey Bass, New Jersey, 2022.

Castelnuovo, Emma, Didattica della matematica, La Nuova Italia, Firenze, 1963

Dewey, John, «Experience and education», The educational forum 50 (3), 1986, pp. 241-252.

Hiebert, James, Grouws, Douglas A., «The effects of classroom mathematics teaching on student' learning», in Lester, Frank K. Jr. (a cura di), Second handbook of research on mathematics teaching and learning, IAP, Charlotte, 2007, pp. 371-404.

Nemirovsky, Ricardo, Kelton, Molly L., Civil, Marta, «Toward a vibrant and socially significant informal mathematics education», in Cai, Jinfa (a cura di), Compendium for research in mathematics education, IES, Reston, 2017.

OCSE-PISA 2022, Technical Report PISA, OECD Publishing, Parigi, 2024.

Piaget, Jean, Psychologie et pédagogie, Editions Denoel, Parigi, 1969.

Skemp, Richard R., «Relational understanding and instrumental understanding», Mathematics teaching 77 (1), 1976, pp. 20-26.

Vygotsky, Lev S., Mind in society: The development of higher psychological processes, Harvard university press, Cambridge, 1978.

Il Cammino dell'Angelo di Monte Faito. Esempio di evoluzione nel tempo dell'escursionismo religioso

Ciro Di Martino
Sez. Mathemare
ciro.dimartino.cdm@gmail.com

Sunto- *L'escursionismo è nato con i primi ominidi che si muovevano per procurarsi il cibo. Successivamente è diventato ricerca dell'avventura, voglia di essere a contatto con la natura e necessità spirituale di visitare luoghi di culto. Il Cammino dell'Angelo di Monte Faito unisce queste due anime dell'escursionismo: sete di spazi aperti e desiderio di preghiera in luoghi consacrati. Dal punto di vista religioso esso è strettamente legato all'esperienza spirituale vissuta nel VI secolo dal vescovo di Stabia Catello e dall'abate di Sorrento Antonino che costruirono il Santuario di S.Michele nel luogo dove, assieme ai fedeli, si rifugiavano per sfuggire alle incursioni dei saraceni. Quando negli anni successivi al 1950 in montagna è avvenuta l'espansione degli sport sulla neve e del turismo itinerante a mobilità dolce, si è verificata la saldatura tra le sue istanze spirituali e quelle ludico-sportive. Il Cammino dell'Angelo di Monte Faito sviluppa i suoi itinerari sul territorio della Costiera Sorrentina, Amalfitana e dell'Agro Nocerino-Sarnese, tra le province di Salerno e Napoli. E' inserito nell'Atlante Regionale dei Cammini della Regione Campania e nel Catalogo dei Cammini Religiosi Italiani del Ministero del Turismo. E' collegato alla Via Francigena del Sud che da Mont Saint Michel, in Francia, conduce a Otranto e percorsa nel Medioevo dai crociati diretti in Terra Santa. Costituisce, inoltre, un'importante Via Micaelica, itinerari escursionistici religiosi legati al culto dell'Arcangelo Michele, caratterizzata dalla devozione millenaria professata in chiesette, tempietti e santuari costruiti su vette montuose. Attraverso la via Francigena è, infine, collegato al Cammino di Santiago di Compostela, completando la sua stretta interconnessione con le principali direttrici del turismo devozionale. I sentieri del Cammino dell'Angelo di Monte Faito sono tra i più belli al mondo. Tra gli altri, Il "Sentiero degli Dei" con il suo panorama incredibile da Agerola a Positano ti porta a sperimentare un paesaggio dai valori eccezionali. Non a caso la Costiera Amalfitana, una parte essenziale degli itinerari del Cammino dell'Angelo di Monte Faito, è stata inserita tra i "Paesaggi Culturali" che l'UNESCO ha valutato "Patrimonio dell'Umanità". Quando i pellegrini hanno percorso per la prima volta i sentieri che conducono al Santuario, probabilmente hanno dovuto farsi strada attraverso un manto vegetativo rigoglioso che opponeva significativi ostacoli alla progressione. Con il passare degli anni, poi, si sono "formati" i sentieri che anche oggi esistono. Ora le comunità, riconoscendo il valore turistico, storico, naturalistico, paesaggistico e culturale di questi percorsi, spendono risorse collettive per conservarli*

percorribili. In definitiva, nel tempo, è cambiato l'approccio alla pratica dell'escursionismo. E' cambiato anche il modo di conoscenza e di sicurezza dei suoi percorsi. Ora le nuove tecnologie assumono un ruolo importante per il godimento di un patrimonio culturale, storico, religioso e naturale che, forse, una volta, neanche si immaginava di avere senza usufruire di mobilità motorizzata. Ne è un esempio il Cammino dell'Angelo di Monte Faito che costituisce sicuramente una buona strategia gestionale del territorio nell'ambito dei cammini internazionali.

Parole chiave: escursionismo; pellegrino; cammino

Abstract- *Hiking was born with the first hominids who traveled for food. It later evolved into adventure seeking, a desire to connect with nature, and a spiritual need to visit places of worship. The Angel's Path of Monte Faito unites these two souls of hiking: thirst for open spaces and desire to pray in consecrated places. From a religious perspective, it is closely linked to the spiritual experience of the 6th-century Bishop of Stabia and Abbot Antonino Sorrento, who built the Sanctuary of Saint Michael on the site where, with the faithful, they took refuge from Saracens raids. With the expansion of snow sports and soft-mobility tourism in the mountains in the years following 1950, its spiritual and recreational needs became intertwined. The Angel's Path of Monte Faito extends along the Sorrento and Amalfi Coasts, and the Agro Nocerino-Sarnese area, between the provinces of Salerno and Naples. It is included in the Campania Regional Atlas of Trails and in the Ministry of Tourism's Catalogue of Italian Religious Trails. It is connected to the Southern Via Francigena, which leads from Mont Saint-Michel in France to Otranto and was travelled in the Middle Ages by crusaders on their way to the Holy Land. It also constitutes an important Via Micaelica, religious hiking trails linked to the cult of the Archangel Michael, characterized by millennia-old devotion practiced in small churches, temples, and sanctuaries built on mountain peaks. Finally, the Via Francigena connects it to the Path of Santiago de Compostela, completing its close connection with the main routes of devotional tourism. The trails of The Angel's Path of Monte Faito are among the most beautiful in the world. Among others, the "Path of the Gods," with its incredible panorama from Agerola to Positano, allows you to experience a landscape of exceptional value. It is no coincidence that the Amalfi Coast, a key part of the itineraries of the Angel Path of Monte Faito, has been included among the "Cultural Landscapes" designated a UNESCO World Heritage Site. When pilgrims first time walked the paths leading to the Sanctuary, they likely had to navigate into a lush vegetation that opposed significant obstacles to their progress. Over the years, the trails that still exist today were "formed." Now, communities, recognizing the touristic, historical, naturalistic, scenic, and cultural value of these trails, are spending collective resources to keep them accessible. Ultimately, over time, the approach to hiking has changed. The way in which its trails are understood and maintained has also changed. New technologies are now playing an important role in the enjoyment*

of a cultural, historical, religious, and natural heritage that, perhaps, once upon a time, was unimaginable without the use of motorized transportation. One example of this is The Angel's Path of Monte Faito, which certainly represents a sound management strategy for the area within the context of international hiking trails.

Keywords: hiking; pilgrim; path

Il Santuario di S. Michele al Faito si trova oggi a 1261 m slm in località Cercasole. Fu costruito dai Santi Catello e Antonino nel VI° secolo su quello che, da allora, fu chiamato Monte S. Michele, oggi chiamato anche "Molare" per la sua forma, la vetta più alta dei Monti Lattari a 1444 m slm. Per raggiungere l'antico sito del Santuario occorre percorrere uno dei sentieri del Cammino con un tempo di percorrenza di circa 45 minuti. Lungo questo tragitto si trova la grotta di S. Catello, dove trovarono spesso riparo i due Santi Catello e Antonino e loro luogo di preghiera e raccoglimento. Su questo percorso di notevole importanza è anche l'anfratto detto "Acqua Santa" dove vive una colonia di Pinguicola Hirtiflora, pianta carnivora che si nutre di insetti, in pericolo di estinzione. Ben presto il Santuario divenne meta di pellegrinaggio per i numerosi prodigi che si verificarono. Dal VII all'XI secolo il Santuario fu tenuto dai monaci benedettini. Successivamente i vescovi stabiesi si prodigarono per la sua manutenzione e nel 1646 supplicarono Papa Innocenzo X di concedere l'indulgenza plenaria perpetua a tutti i fedeli che avessero visitato il Santuario dai primi Vespri del 31 luglio fino al tramonto del sole del 1° Agosto. Il Papa ne concesse il privilegio spirituale che tuttora è in vigore anche in occasione del 29 settembre, giorno dedicato a S. Michele. Nel 1818 il Santuario fu distrutto da un incendio e ricostruito nel 1843. I prodigi ripresero numerosi fino al 1862 quando il brigantaggio ne fece luogo poco ospitale e un fulmine lo colpì causandone l'abbandono. La statua di S. Michele fu ricomposta e trasportata nel duomo di Castellammare di Stabia. Ma la devozione e il culto dell'Arcangelo non cessarono; anzi il Beato Bartolo Longo dichiarò S. Michele protettore del Santuario di Pompei che fu, per tale motivo, costruito rivolto verso il "Molare". Il Santuario fu ricostruito nel 1950 nella sua posizione attuale.

Ora è raggiungibile anche in auto, mediante una stradina che si inerpica tra magnifiche faggete in un ambiente ancora incontaminato.

Il Cammino dell'Angelo di Monte Faito sviluppa i suoi itinerari sul territorio della Costiera Sorrentina, Amalfitana e dell'Agro Nocerino-Sarnese, tra le province di Salerno e Napoli. Sono 32 i Comuni delle province di Napoli e Salerno da cui partono i sentieri del Cammino. E' inserito nell'Atlante Regionale dei Cammini della Regione Campania e nel Catalogo dei Cammini Religiosi Italiani del Ministero del Turismo che ne hanno riconosciuto il valore. E' collegato in otto tappe alla Via Francigena del Sud che da Mont Saint Michel, in Francia, conduce a Otranto e percorsa nel Medioevo dai soldati diretti in Terra Santa per le Crociate. Costituisce, inoltre, un'importante Via Micaelica, itinerari escursionistici religiosi legati al culto dell'Arcangelo Michele, caratterizzata dalla devozione millenaria professata in chiesette, tempietti e santuari costruiti su vette montuose.

La leggenda più famosa degli itinerari religiosi si riferisce a 7 grandi Santuari dedicati all'Arcangelo Michele (Linea Sacra Michaelica): Skelling Michael in Irlanda, S. Michael's Mount in Cornovaglia (Regno Unito), Mont Saint Michel in Normandia (Francia), Sacra di San Michele in Val di Susa (Piemonte), Santuario di San Michele Arcangelo nel Gargano (Puglia), Monastero di San Michele Panormitis nell'isola di Symi (Rodi, Grecia), Monastero di Monte Carmelo (Haifa, Israele). I 7 itinerari sono tutti su una linea quasi retta, dall'Irlanda a Gerusalemme. Il Santuario di San Michele a Faito è strettamente legato a quello nel Gargano. Sulla porta hanno ambedue la stessa scritta "Terribilis est locus iste. Hic domus Dei est et Porta Coeli", impressionante è questo luogo, qui è la casa di Dio e la Porta del Cielo. Entrambi sono legati al culto longobardo e alla tradizione micaelica. I Longobardi diffusero il culto di S. Michele in tutta l'Europa e il Faito è una tappa di questo irraggiamento verso sud-ovest, quale continuità storico-devozionale e topografica. Tale culto, di origine bizantina, esisteva prima dell'avvento dei Longobardi, loro lo adottarono e lo resero istituzionale. L'adorazione di S. Michele in occidente ebbe origine dal V° secolo, prima, quindi, della discesa dei Longobardi in Italia. La tradizione colloca la prima

apparizione dell'arcangelo a Lorenzo Maiorano, vescovo di Siponto. Si racconta che un ricco possidente di Siponto, di nome Elvio o Gargano, perse un toro che si rifugiò in una grotta. Quando il signorotto lo ritrovò, scoccò una freccia che, invece di ferire il toro, tornò indietro e ferì il facoltoso latifondista. Sconvolto egli si rivolse al vescovo Lorenzo Maiorano che ordinò tre giorni di preghiera e digiuno. Alla fine dei tre giorni, San Michele apparve in sogno al vescovo e gli disse che la grotta era sacra e Lui l'aveva scelta come suo Santuario. Lorenzo Maiorano consacrò la grotta che divenne il Santuario di San Michele a Monte Sant'Angelo, ancora oggi meta di pellegrinaggio. I Longobardi, quindi, trovarono il culto di San Michele già presente quando intorno al 650, partendo dal ducato di Benevento, conquistarono il promontorio del Gargano. San Michele per i Longobardi somigliava molto al loro arcangelo guerriero Odino, dio germanico della guerra, che combatteva nel cielo, guida dei morti e protettore dei guerrieri. Vi fu, insomma, una "sostituzione religiosa" che facilitò l'integrazione delle culture germaniche e italiche. Il re Grimoaldo, dopo una vittoria, lo diffuse sui suoi possedimenti. L'arcangelo divenne presto patrono dell'intero popolo longobardo che lo usò per dare identità religiosa e politica al regno. In breve tempo sorsero centinaia di luoghi di culto dedicati a San Michele su alture e grotte, tra cui anche San Michele al Faito. L'assonanza tra i Cammini di San Michele a Faito e Monte Sant'Angelo nel promontorio del Gargano è dimostrata anche dalla presenza lungo il sentiero che da Vico Equense porta al Santuario di Monte Faito di una chiesetta dedicata a S. Maria del Toro.

I percorsi del Cammino dell'Angelo di Monte Faito uniscono le località a valle al Santuario in modo radiale. Il Cammino non ha una sola località di inizio, ma trentadue ed una sola di fine: il Santuario di S. Michele Arcangelo. Come la nascita di Gesù in un'umile stalla di Betlemme riuscì ad attirare la devozione dei primi pellegrini di ogni ceto sociale, contadini, pastori e re, che si recarono da ogni luogo alla Capanna, così il Santuario è il centro di questo antico pellegrinaggio che nel corso della storia ha fatto confluire i devoti a S. Michele Arcangelo in un unico luogo.

Duecentoquindici km di sentieri si intrecciano tra loro costituendo una rete escursionistica convergente in un unico punto nodale e attrattivo.

Il Cammino dell'Angelo di Monte Faito costituisce, perciò, un'importante via Michaelica. Questi itinerari, secondo la tradizione medievale, rappresenterebbero i colpi di spada con cui l'Arcangelo Michele scacciò il diavolo all'inferno. C'è un sito nel percorso del Cammino nei pressi della Grotta di San Catello detto "Ciampata del Diavolo" una forma di orma sovraumana che, secondo una leggenda, è stata lasciata dal Diavolo nella sua fuga verso gli inferi. La Grotta era il rifugio del vescovo eremita di Stabia Catello e del monaco Antonino fuggiti assieme ai fedeli alla furia longobarda. In essa l'Arcangelo Michele apparve ai due Santi chiedendo di costruire sulla vetta del monte Aureo (Molare) il tempio, ora ricostruito sulla vetta Cercasole e meta dei pellegrinaggi.

La miracolosa statua che vi era custodita, alta un metro, secondo tradizione, vi fu portata dallo stesso S. Catello. Il miracolo della trasudazione della statua si ripeteva, quasi sempre, alla vigilia dell'anniversario della dedicazione della Chiesetta a S. Michele (1° agosto) e nel giorno dedicato al Santo (29 settembre). Ora il Cammino dell'Angelo di Monte Faito è aperto e percorribile ogni giorno da maggio a settembre di ogni anno, restando chiuso da ottobre ad aprile per sicurezza a causa delle possibili condizioni meteo avverse che potrebbero causare interruzioni dei percorsi.

Prima di iniziare il Cammino, il pellegrino può munirsi della Credenziale del Pellegrino che viene rilasciata gratuitamente, con relativo primo timbro, dalle strutture convenzionate al momento della partenza (chiese, hotel, ristoranti, bar, salumerie, ecc). Una volta percorsa almeno una delle tappe del Cammino, giunti al Santuario di San Michele, i pellegrini possono recarsi presso la Segreteria del Cammino, mostrare la credenziale con i relativi timbri che attestano il cammino fatto, e ricevere il Testimonium controfirmato dal Rettore-Abate da conservare a ricordo dell'esperienza effettuata con sentito animo cristiano. Il 31 luglio e il 29 settembre di ogni anno i pellegrini possono ottenere l'indulgenza plenaria.

Il Cammino dell'Angelo di Monte Faito è anche un percorso escursionistico "laico" meraviglioso che convive con il suo spirito religioso. Infatti i sentieri del Cammino dell'Angelo di Monte Faito sono tra i più belli al mondo, dal punto di vista storico, culturale, naturalistico e paesaggistico oltre che religioso. Il "Sentiero degli Dei" con il suo panorama incredibile da Agerola a Positano; la "Valle delle Ferriere" con gli antichi opifici della Repubblica Amalfitana e che conduce alla Riserva Naturale Orientata, tesoro di biodiversità; alcuni collegamenti tra le "Torri di Avvistamento" usate per contrastare le scorribande di pirati, saraceni e barbari nel corso della storia; i percorsi con tantissime chiese e cappelle, ognuna con la sua storia, fanno parte dei sentieri del Cammino dell'Angelo di Monte Faito. Camminare per i suoi sentieri tra i terrazzamenti degli orti e dei limoneti vuol dire godere di un paesaggio unico, vivo e rurale nel cuore di una gestione del territorio che resiste da secoli. I terrazzamenti sono un esempio di sfruttamento del territorio per fini agricoli. Una natura impervia è stata modificata dall'uomo con muri a secco e regimentata idrologicamente, rendendola produttiva e paesaggisticamente rilevante. L'intero territorio oggi è famoso in tutto il mondo per i suoi terrazzamenti con limoneti a pergola. La Costiera Amalfitana, una parte essenziale degli itinerari del Cammino dell'Angelo di Monte Faito, è stata inserita tra i "Paesaggi Culturali" che l'UNESCO ha valutato "Patrimonio dell'Umanità". Sono percorsi che si snodano in uno straordinario esempio di paesaggio mediterraneo con eccezionali valori culturali, storici e naturali. Camminare sui sentieri del Cammino significa vivere una esperienza unica di uso intelligente delle risorse del territorio.

Quando i pellegrini hanno percorso per la prima volta i sentieri che conducono al Santuario probabilmente hanno dovuto aprirsi il tragitto tra una vegetazione rigogliosa e difficile da superare. Con il passare degli anni, poi, si sono "formati" i sentieri che anche oggi esistono. Ha contribuito alla genesi dei percorsi la necessità dei pastori di condurre i propri animali verso pascoli più fertili e produttivi e la transumanza verso zone climatiche migliori, scelte tra costa e montagna. Portare i prodotti caseari, la neve delle

neviere, il legname per le costruzioni, le castagne, ecc., dalle zone impervie a quelle costiere più popolate, ne ha completato l'opera di formazione. Ora le comunità, riconoscendo il valore turistico, storico, naturalistico, paesaggistico e culturale di questi percorsi, spendono risorse collettive per conservarli percorribili. Il Cammino dell'Angelo di Monte Faito ha una propria Governance costituita allo scopo di rendere fruibile a tutti, anche a persone disabili, un patrimonio di inestimabile valore. Un'adeguata segnaletica verticale e orizzontale indica i percorsi. La segnaletica è di tipo misto, nel senso che alla segnaletica del Club Alpino Italiano (CAI) di standard internazionale unisce una propria segnaletica. L'insieme dei percorsi del Cammino dell'Angelo di Monte Faito, dotati di specifica segnaletica, non è altro che un sottoinsieme di quella del CAI. In alcuni punti degli itinerari è possibile, mediante uno smartphone e QR code, collegarsi ad un sito web dedicato da dove è possibile ricavare ogni notizia utile a percorrerne i sentieri, informando sulla loro percorribilità e fornendone le tracce da poter scaricare sul proprio apparecchio ricevente. Presso il Santuario un'Accoglienza Pellegrini assicura la piena fruibilità logistica e spirituale. Ad onor del vero questa organizzazione è solo in parte attiva oggi in quanto è in atto un adeguamento a tale tipo di gestione.

L'escursionismo si è evoluto nel tempo senza perdere il suo significato fondamentale. I riti, le pratiche devozionali e le tradizioni non sono cambiati nella sua storia. Nel tempo è cambiato l'approccio alla pratica dell'escursionismo; è cambiato il modo di conoscenza e di sicurezza dei suoi percorsi. Le due anime dei percorsi sono ora fuse in un unicum che non ha eguali nel mondo. L'informazione sull'esistenza degli itinerari per recarsi al Santuario tempo fa si giovava della tradizione orale e della memoria collettiva. L'escursionismo veniva praticato per godere delle bellezze naturali dei luoghi dopo esplorazioni e esperienze dirette e tramandate. Ora le nuove tecnologie assumono un ruolo importante per il godimento di un patrimonio culturale, storico e naturale che, forse, una volta neanche si immaginava di avere a portata di mano (o meglio di piede?). Ne è un esempio "Il Cammino dell'Angelo di Monte Faito" che costituisce

sicuramente una buona strategia gestionale del territorio nell'ambito dei Cammini Religiosi internazionali.

Bibliografia

Celoro Parascandolo, Aniello, Il Monte Faito nella storia e nella leggenda, Nicola Longobardi Editore, Luogo, 1997.

Di Capua, Francesco, Il Santuario di San Michele Arcangelo sul Monte Faito, Proficiendi Studium, Castellammare di Stabia, 2009.

Di Martino, Ciro, Malafronte, Catello, Guida ai sentieri del Cammino dell'Angelo, R&MAG Partners, Castellammare di Stabia, 2024.

Una lettura alternativa: monotonia e concavità

Sofia La Franca
Studentessa IV anno Liceo "Torquato Tasso" di Salerno
sofialf700@gmail.com

Sunto- *Il progetto si propone di analizzare la concavità e la monotonia di funzioni quali quelle elementari (potenza, radice, esponenziale, logaritmo, goniometriche) senza ricorrere al calcolo differenziale, ma impiegando unicamente strumenti di algebra e geometria euclidea. L'obiettivo è dimostrare come le proprietà sopra esposte possano essere ricavate anche senza ricorrere agli strumenti analitici. Questo approccio consente anche applicazioni concrete, nel campo della Fisica, ad esempio dell'ottica geometrica, e dell'Economia. In questo modo il progetto avanza una lettura alternativa ad argomenti solitamente affidati all'Analisi Matematica.*

Parole chiave: funzioni elementari; algebra; applicazioni

Abstract- *The project aims to analyze the concavity and monotonicity of functions such as elementary ones (power, root, exponential, logarithm, goniometers) without resorting to Mathematical Analysis, but using only tools from algebra and Euclidean geometry. The goal is to demonstrate how the above properties can be derived even without resorting to the tools of differential calculus. This approach also allows for concrete applications, in the fields of Physics, e.g. geometric optics, and Economics. In this way the project advances an alternative reading to topics usually entrusted to Mathematical Analysis.*

Keywords: elementary functions; algebra; applications

1. Introduzione: monotonia e concavità

L'articolo si incentra su metodi di risoluzioni non analitici per determinare le proprietà di monotonia e concavità. Al fine raggiungere tale obiettivo si propongono di seguito tre definizioni alla base dei successivi sviluppi.

Una funzione $y = f(x)$ *di dominio* X *si dice strettamente crescente in* X *se* $\forall x_1, x_2$ *con* $x_1 \in X$, $x_2 \in X \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

Seguono rispettivamente le definizioni di stretta convessità e stretta concavità.

Una funzione $y = f(x)$ *continua in un intervallo* $[a, b] \subset R$ *si dice strettamente convessa in tale intervallo se risulta* $\forall x_1, x_2$ *con* $x_1 \in X$, $x_2 \in X$

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}.$$

Una funzione $y = f(x)$ *continua in un intervallo* $[a, b] \subset R$ *si dice strettamente concava in tale intervallo se risulta* $\forall x_1, x_2$ *con* $x_1 \in X$, $x_2 \in X$

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}.$$

2. Funzioni goniometriche

Oltre agli strumenti algebrici si può fare affidamento anche sugli ausili geometrici, come rende evidente la dimostrazione successiva volta a determinare monotonia e concavità della funzione *y=sen x*, accompagnata da costruzione geometriche effettuate su GeoGebra, che possono risultare come un valido esercizio per radicare le nozioni proposte.

Teorema 1. *La funzione y=sen x è strettamente crescente e strettamente concava nell'intervallo* $\left[0, \pi/2\right]$.

Dimostrazione.

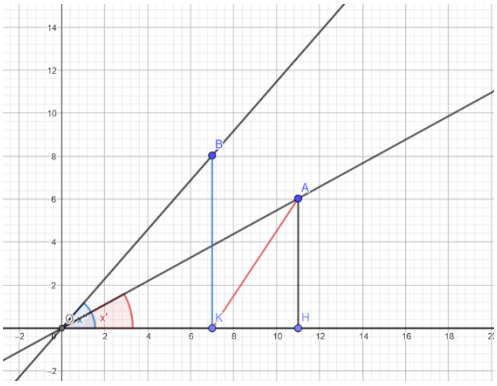
«Si considerino i due angoli acuti $x_1 = r\hat{}s$, $x_2 = r\hat{}t$, con $x_1 < x_2$. Fissati sulle semirette s e t i punti A e B tali che $OA^- = OB^-$, siano H e K i piedi delle perpendicolari condotte rispettivamente da A e da B su r. I triangoli OKA e OKB hanno: OK^- in comune, $OA^- = OB^-$, per costruzione, (x_2), per cui risulta $KA < KB$. Poiché $HA < KA$, si ha $HA < KB$ e quindi

$$\frac{HA}{OA} < \frac{KB}{OB},$$

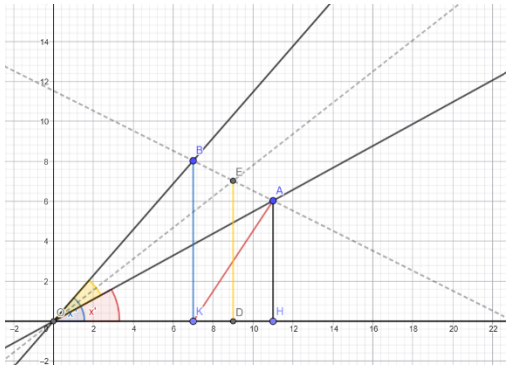
cioè:

$$senx_1 < senx_2.$$

Pertanto, $senx$ è strettamente crescente in $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.»



«Per dimostrare la concavità, si completi la figura precedente considerando l'intersezione C della retta AB con la retta r, il punto medio D del segmento AB e il piede L della perpendicolare abbassata da D su r. »



«Si ha:

$$C\hat{O}D = x_1 + \frac{x_1 - x_2}{2} = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

e quindi, poiché $sen\, C\hat{O}D = \frac{DL}{OD}$, si ha:

$$\frac{DL}{OD} = sen\frac{x_1 + x_2}{2}$$

D'altra parte:

$$DL^{-} = \frac{1}{2}(AH^{-} + BK^{-}), \qquad \frac{DL}{OA} = \frac{1}{2}\left(\frac{BK^{-}}{OA}\right)$$

cioè:

$$\frac{DL}{OA} - \frac{1}{2}(senx_1 + senx_2) = \frac{senx_1 + senx_2}{2}$$

essendo $OD < OA$, risulta:

$$\frac{DL}{OD} > \frac{DL}{OA} cioe` \, sen\frac{x_1 + x_2}{2} > \frac{senx_1 + senx_2}{2}$$

Analogamente, si vede che $sen\, x$ è strettamente decrescente e strettamente concava in $\left[\frac{\pi}{2,\pi}\right]$.»

3. Funzione inversa

Si procede con lo studio di monotonia e concavità dell'arcoseno, dando così l'opportunità di introdurre altri due metodi che nello studio della monotonia e della concavità esonerano lo studente da conoscenze analitiche, ossia il teorema di monotonia della funzione inversa e il teorema di concavità della funzione inversa di cui seguono le dimostrazioni.

Si dimostri che

se una funzione strettamente monotona è iniettiva, la sua inversa è una funzione strettamente monotona dello stesso tipo.

Si suppone che la funzione $f(x)$ sia decrescente e $f: A \subseteq R \to R$. Ciò significa che $\forall x_1, x_2 \in A$ tali che

$x_1 > x_2$ risulta $f(x_1) > f(x_2)$.

Si provi che f è iniettiva, ossia $\forall\, a, b$, se $a \neq b$ allora $f(a) \neq f(b)$.

Dunque, dati $a, b \in A$ con se $a \neq b$ poiché R è un insieme ordinato vi sono due possibilità: $a > b$, $a < b$. Visto che $f(x)$ è una funzione strettamente decrescente per ipotesi:

$a > b \Rightarrow\ f(a) > f(b)$

$a < b\ \Rightarrow f(a) < f(b)$.

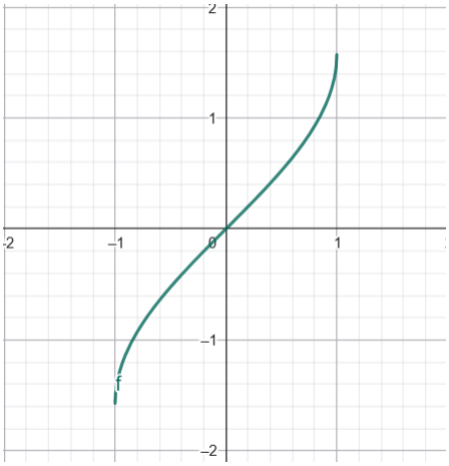
Si indichi con $Im(f)$ l'immagine della funzione. L'iniettività assicura l'esistenza di una funzione inversa f^{-1}.

$$f^{-1}: Im(f) \to A$$

Si dimostra che f^{-1} è strettamente decrescente, ossia presi due elementi $y_1, y_2 \in Im(f)$ esistono $x_1, x_2 \in A$ tali che $f(x_1) = y_1$ e $f(x_2) = y_2$.

Dalla disuguaglianza $y_1 > y_2$ si ha $f(x_1) > f(x_2)$ e per la monotonia stretta decrescente di f deve essere $x_1 > x_2$. Si osservi che $x_1 = f^{-1}(y_1)$ e $x_2 = f^{-1}(y_2)$ per cui da $x_1 > x_2$ si ottiene $f^{-1}(y_1) > f^{-1}(y_2)$. La dimostrazione risulta quindi conclusa.

In maniera analoga la funzione *y=arcsen x* così come la funzione *y=sen x* è una funzione strettamente crescente per l'intervallo $[0, \pi/2]$.



Si passi adesso allo studio della concavità della funzione *y=arcsen x*. In questo caso sapendo che la funzione seno è concava dato l'intervallo $[0, \pi/2]$ e conoscendo il teorema di concavità della funzione inversa è possibile determinare nel dato intervallo la funzione *y=arcsen x* come concava. Segue la dimostrazione del teorema utilizzato.

Si suppone f crescente e concava, allora g = f^{-1} crescente e convessa.

$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ $\forall x_1, x_2 \in R$, con $x_1 \neq x_2$

Si pone $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$ allora $x_1 = g(y_1)$, $x_2 = g(y_2)$. Segue la sostituzione:

$f\left(\frac{g(y_1)+g(y_2)}{2}\right) > \left(\frac{y_1+y_2}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{g(y_1)+g(y_2)}{2} > g\left(\frac{y_1+y_2}{2}\right) \quad \Rightarrow g\left(\frac{y_1+y_2}{2}\right) < \frac{g(y_1)+g(y_2)}{2}$.

Dunque è dimostrata la convessità della funzione inversa nel momento in cui la funzione iniziale è strettamente crescente e concava e viceversa.

Analoghi procedimenti rendono possibile dimostrare come se $f(x)$ è strettamente decrescente e strettamente convessa/concava allora anche l'inversa è strettamente convessa/concava.

4. Altre classi di funzioni

Ai fini di mostrare nuovamente l'efficacia di tale metodo si propone lo studio della monotonia e della concavità della funzione valore assoluto e della funzione reciproca: $f(x) =| x |$, $f(x) = \frac{1}{x}$.

4.1 Funzione valore assoluto

Iniziando dalla funzione $f(x) =| x |$ per $x \geq 0 \Rightarrow | x |= x$.

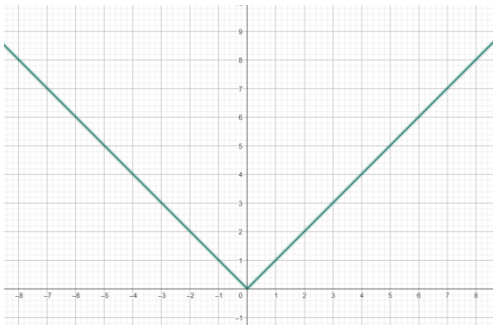
Se $0 < x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 < x_2 \Rightarrow | x_1 | < | x_2 |$ per l'intervallo $[0, +\infty[$.

Analogo è il ragionamento per studiare l'intervallo $]-\infty;\ 0]$, che è invece decrescente.

Adattando la definizione iniziale si prosegue con lo studio della convessità.

$$| \frac{x_1 + x_2}{2} | \leq \frac{| x_1 | + | x_2 |}{2} \Rightarrow | x_1 + x_2 | \leq | x_1 | + | x_2 |.$$

La funzione non è strettamente convessa sull'intero dominio, ma è convessa in tutto il dominio R.



4.2 Funzione reciproca di x

La funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ è strettamente decrescente su entrambi gli intervalli $]-\infty, 0]$ e $[0, +\infty[$; $risulta$ invece concava su $]-\infty, 0]$ e convessa su $[0, +\infty[$.

Su $(0, +\infty)$: se $0 < x_1 < x_2$, allora moltiplicando per $\frac{1}{(x_1 x_2)} > 0$:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2}.$$

Quindi la funzione decresce.

Su $(0, +\infty)$: convessa

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = \frac{2}{x_1 + x_2} \Rightarrow \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x_2}\right).$$

La disuguaglianza da verificare è:

$$\frac{2}{x_1 + x_2} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x_2}\right).$$

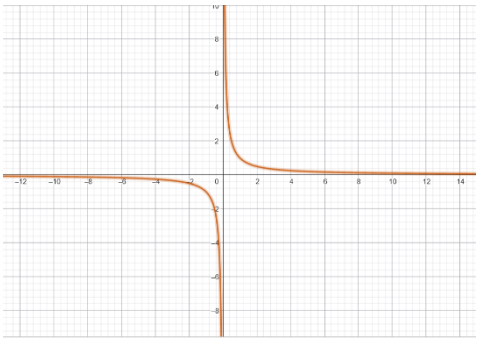
Moltiplicando per $2(x_1 + x_2)x_1 x_2 > 0$:

$$4x_1 x_2 \leq (x_1 + x_2)^2,$$

che è equivalente a

$$(x_1 - x_2)^2 \geq 0.$$

Quindi la funzione è convessa.



5. Un approccio pratico

Le competenze ottenute permettono di risolvere problemi concreti; ad esempio, qui sono proposti due problemi, il primo inerente all'economia e il secondo alla fisica.

5.1 Problema di economia

In microeconomia la funzione di produzione di Cobb–Douglas lega la quantità prodotta Q all'impiego dei fattori lavoro (L) e capitale (K):

$$xQ = A \cdot L^a \cdot K^b$$

dove A rappresenta l'efficienza produttiva e a, b sono esponenti compresi, nel caso tipico, fra 0 e 1. Se si tiene fisso il capitale K e si fa variare il solo lavoro L, con esponente a = 1/2 (per la sua semplicità), la relazione si riduce alla funzione elementare:

$$Q(L)=A\sqrt{L},\ \ L \geq 0, A > 0$$

Economicamente, vi sono due domande da porsi: la produzione aumenta sempre se si impiega più lavoro (monotonia)? E, se aumenta, lo fa a un ritmo costante, crescente o decrescente (concavità)? Quest'ultima proprietà corrisponde, nel linguaggio economico, alla cosiddetta legge dei rendimenti marginali decrescenti: ogni unità aggiuntiva di lavoro produce un incremento di output via via più piccolo.

Per il teorema di produzione con un solo fattore variabile la funzione $Q(L)=A\sqrt{L}$, con A > 0, definita per L ≥ 0, è strettamente crescente e strettamente concava.

Dimostrazione. Siano L^1, $L^2 \geq 0$, con $L^1 < L^2$.

Poiché la funzione radice quadrata è strettamente crescente da $L^1 < L^2$ segue $\sqrt{L^1} < \sqrt{L^2}$, e quindi, essendo A > 0:

$A \cdot \sqrt{L_1} < A \cdot \sqrt{L_2} \implies Q(L_1) < Q(L_2)$

dunque Q è strettamente crescente: a un impiego maggiore di lavoro corrisponde sempre una produzione maggiore.

Per la stretta concavità occorre dimostrare che, per ogni coppia $L_1 \neq L_2$, il valore della funzione nel punto medio supera la media dei valori agli estremi:

$$Q\left(\frac{L_1+L_2}{2}\right) > \frac{Q(L_1) + Q(L_2)}{2}$$

ossia, dividendo per A > 0:

$$\sqrt{\frac{L_1+L_2}{2}} > \frac{L_1 + L_2}{2}$$

Elevando al quadrato entrambi i membri (entrambi positivi) si ottiene:

$$\sqrt{\frac{L_1+L_2}{2}} > \frac{L_1 + 2\sqrt{L_1L_2}+L_2}{4} \Leftrightarrow L_1 - 2\sqrt{L_1L_2} + L_2 \Leftrightarrow (\sqrt{L_1} - \sqrt{L_2})^2 > 0,$$

disuguaglianza sempre vera perché $L_1 \neq L_2$ implica $\sqrt{L_1} \neq \sqrt{L_2}$. Pertanto Q(L) è strettamente concava in [0, +∞[.

Da una prospettiva economica la stretta crescenza di Q(L) traduce il fatto che il lavoro è un fattore produttivo utile: non esiste un livello di L oltre il quale la produzione diminuisce. La stretta concavità indica invece la legge dei rendimenti marginali decrescenti: incrementi uguali di lavoro (come una nuova assunzione) producono incrementi di output minori quanto più L è grande.

5.2 Problema di fisica

Il seguente problema rientra nell'ambito della fisica ottica. Per una lente sottile convergente, con distanza focale $f > 0$ fissata, la posizione dell'immagine di un oggetto puntiforme posto sull'asse ottico è legata alla posizione dell'oggetto dall'equazione dei punti coniugati:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$$

dove p è la distanza dell'oggetto dalla lente e q la distanza dell'immagine. Si analizzi il caso in cui un oggetto reale è posto oltre il fuoco, cioè p > f, per cui l'immagine è reale e si può esprimere q in funzione di p:

$$q(p) = \frac{f \cdot p}{(p - f)}, p > f$$

Le domande ricalcano quelle dell'esercizio precedente: allontanando l'oggetto dalla lente, l'immagine si comporta sempre nello stesso modo (monotonia)? E la variazione di q rallenta o si accentua (concavità)? Per semplicità nei calcoli si pone u = p − f > 0, si ha

$$q(p) = \frac{f + f^2}{u}, u = p - f > 0$$

Attenendosi al teorema di distanza dell'immagine in una lente sottile per f > 0 fissato, la funzione $q(p) = \frac{f \cdot p}{(p-f)}$, definita per p > f, è strettamente decrescente e strettamente convessa.

Dimostrazione. Si pone u = p − f > 0, in modo che $q(p) = \frac{f+f^2}{u}$. Si pone $p^1 < p^2 < f$ e $u^1 = p^1 - f$, $u^2 = p^2 - f$, con $0 < u^1 < u^2$.

Da $0 < u_1 < u_2$ segue, dividendo entrambi i membri per $(u_1u_2) > 0$:

$$\frac{1}{u_1} > \frac{1}{u_2} \Longrightarrow \frac{f^2}{u_1} > \frac{f^2}{u_2} \Longrightarrow \frac{f+f^2}{u_1} > \frac{f+f^2}{u_2}$$

cioè $q(p_1) > q(p_2)$: al crescere della distanza dell'oggetto, l'immagine si avvicina al fuoco. La funzione è dunque strettamente decrescente. Per quanto concerne la convessità occorre mostrare che, per ogni $u_1 \neq u_2$ positivi, il valore nel punto medio è inferiore alla media dei valori agli estremi:

$$f + \frac{2f^2}{u_1 + u_2} < \frac{(f + \frac{f^2}{u_1}) + (f + \frac{f^2}{u_1})}{2}$$

che, semplificando la costante f e portando f^2 a fattor comune, equivale a:

$\frac{2}{u_1+u_2} < (\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2})\frac{1}{2} = \frac{u_1+u_2)}{2u_1u_2}$.

Moltiplicando entrambi i membri per $2u_1u_2(u_1+u_2) > 0$ si ottiene:

$$4u_1u_2 < (u_1 + u_2)^2 \iff 0 < {u_1}^2 - 2u_1u_2 + {u_2}^2 \iff (u_1 - u_2)^2 > 0$$

disuguaglianza sempre vera perché $u_1 \neq u_2$. Pertanto q(p) è strettamente convessa per p > f.

Da un punto di vista fisico la stretta decrescenza conferma il comportamento previsto delle lenti convergenti: allontanando l'oggetto, l'immagine reale si sposta verso il fuoco immagine, senza mai invertire tendenza. La stretta convessità mostra invece che questo avvicinamento avviene con variazioni sempre più piccole: per grandi valori di p, un ulteriore allontanamento dell'oggetto sposta l'immagine di poco.

6. Conclusione

In summa lo studio di monotonia e concavità senza l'uso di strumenti analitici si rivela una possibilità valida e anzi efficace nella risoluzione di problemi reali.

Bibliografia

F. Casolaro (1990) *Uno studio di funzioni elementari senza l'utilizzo dell'Analisi Matematica*. Atti del Convegno Nazionale Mathesis "La Matematica negli anni '90", pag. 206-219.

F. Casolaro, L. Paladino (2010) *Analisi sociale e rigore scientifico: Scelta di equilibrio per l'ottimizzazione dei risultati nell'insegnamento della Matematica*. Atti del Convegno Nazionale *Logica, linguaggio e didattica della matematica 2010*, pp. 67-82.

H.R. Varian (2014) *Microeconomia*, Zanichelli, Bologna.

J. Serway, A. Raymond, J. William (2012) *Fisica per scienze e ingegneria*, EdiSES, Napoli.

I modelli matematici nella Fisica classica e nella Meccanica quantistica

Mandrone Mario Innocenzo
Vice Presidente A.P.A.V.
mandronemarioinnocenzo@gmail.com

Sunto- *Questo lavoro nasce con l'intento di: 1) costruire un percorso multidimensionale (dimensione concettuale, formale, epistemologica) riferito ai modelli matematici dei fenomeni fisici; 2) dare una possibile risposta all'evidente e pressante difficoltà di alcuni docenti nell'affrontare gli argomenti di meccanica quantistica dovuta a cause di vario genere fra cui l'intrinseca complessità degli argomenti da sviluppare. L'obiettivo è quello di analizzare alcuni problemi specifici di formalizzazione matematica quali, ad esempio, i modelli cosmologici in fisica relativistica, l'analisi statistica dei sistemi termodinamici e l'applicazione delle statistiche quantistiche. Nel presentare tali argomenti si cercherà di mettere in rilievo gli agganci storici e culturali dei singoli argomenti per inquadrare la fisica in contesti culturali più ampi e per promuovere nuove competenze relative alla modellizzazione in fisica. Senza dubbio ciò non costituisce una trattazione esaustiva dei temi proposti ma ha il solo scopo di evidenziarne gli aspetti rilevanti ai fini di una trattazione didattica.*

Parole chiavi: *Modellazione matematica; equazioni di campo, metrica FLRW; statistica classica, statistiche quantistiche.*

Abstract- *This work was conceived with the following objectives: 1) To construct a multidimensional (conceptual, formal, and epistemological) approach to mathematical models of physical phenomena; 2) To offer a possible solution to the evident and pressing difficulty some teachers face in addressing quantum mechanics topics, due to various factors, including the intrinsic complexity of the topics to be covered. The objective is to analyze specific problems of mathematical formalization, such as cosmological models in relativistic physics, the statistical analysis of thermodynamic systems, and the application of quantum statistics. In presenting these topics, we will attempt to highlight the historical and cultural connections of each topic, placing physics within broader cultural contexts and fostering new skills related to modeling in physics. This is certainly not an exhaustive treatment of the topics covered but is intended only to highlight aspects that are relevant for educational purposes.*

Keywords: *Mathematical modeling; field equations, FLRW metric; classical statistics, quantum statistics.*

1. Introduzione

Il tema centrale del mio intervento riguarda un complesso di problemi sollevati dagli sviluppi recenti della modellistica matematica evidenziando il diverso utilizzo dei modelli matematici in fisica classica e in fisica quantistica, partendo dalla definizione stessa di modello matematico. Un modello matematico è la rappresentazione formale di idee o conoscenze relative ad un fenomeno. Questa definizione contiene una descrizione completa delle caratteristiche che deve avere tale modello e che possono essere raccolte in tre punti fondamentali, non separabili l'uno dall'altro. Precisamente:

1. un modello matematico è la rappresentazione di un fenomeno;
2. tale rappresentazione non è descrittiva, discorsiva o a parole, ma formale, espressa cioè in linguaggio matematico;
3. non esiste una via diretta dalla realtà alla matematica.

In altri termini il fenomeno specifico studiato non determina la sua rappresentazione matematica; ciò che invece si fa è tradurre in formule idee e conoscenze relative al fenomeno considerato. Oggi si modellizzano i fenomeni più disparati: eruzioni vulcaniche, flusso sanguigno, schiuma della birra, aerodinamica di una macchina da corsa, diffusione di inquinanti nell'ambiente. Con l'aiuto di modelli si progettano barche da regata vincenti, strategie di evacuazione da zone sismiche, tute da nuoto fluidodinamiche che copiano la pelle degli squali. Un modello matematico è dunque una rappresentazione idealizzata della realtà che si esprime attraverso una relazione in termini logico-matematici tra le variabili caratteristiche del sistema. Tale relazione può essere costituita, ad esempio, da equazioni differenziali, integrali, da un sistema di equazioni algebriche, da disequazioni. Sarà perciò possibile studiare le proprietà del modello, per comprendere e prevedere l'evoluzione stessa del sistema, o le relazioni tra le diverse variabili, o per capire le conseguenze di un certo intervento in modo da poter intervenire poi direttamente nella realtà. Quindi, il modello

matematico di un “fenomeno fisico” è un processo di razionalizzazione ed astrazione che consente di analizzare il problema, descriverlo in modo oggettivo e formulare una sua “simulazione”, utilizzando un linguaggio simbolico universale. La costruzione di un modello matematico può essere perciò sintetizzata in quattro fasi: 1) l’analisi del fenomeno che si intende studiare; 2) la costruzione vera e propria del modello, ovvero la “traduzione” in linguaggio matematico del problema o del fenomeno da analizzare; 3) lo studio del modello matematico al fine di promuovere un’analisi critica che porta a formulare giudizi, valutare possibili soluzioni e/o fare previsioni sulla evoluzione futura; 4) la verifica sperimentale. Un modello, però, per essere funzionale, deve possedere contemporaneamente i seguenti quattro requisiti che spesso sono in opposizione tra loro: 1) generalità: deve descrivere una classe di fenomeni quanto più ampia possibile; 2) affidabilità: deve descrivere un processo abbastanza accuratamente, in modo che il modello, pur fornendo risultati approssimati, sia abbastanza significativo; 3) semplicità: deve essere sufficientemente semplice da poter essere risolto matematicamente; 4) validazione del modello stesso. Obiettivo del presente lavoro è anche quello di introdurre un approccio sperimentale alla Matematica e proporre un possibile itinerario didattico per una educazione alla modellizzazione rivolta a tutti gli studenti, indipendentemente dalla futura prosecuzione dei loro studi. L’intento è quello di delineare: a) un insegnamento più aperto alla innovazione tecnologica, fornendo un ampio ventaglio di modelli (per il cui sviluppo è indispensabile il ricorso alle nuove tecnologie); b) un insegnamento aperto all’innovazione didattica, proponendo un percorso di educazione alla modellizzazione. Tutto ciò in quanto la matematica, come ben si sa, ha non solo una sua intrinseca valenza didattica, ma possiede anche una profonda valenza formativa in quanto induce alla: 1) riflessione critica; 2) acquisizione di metodo; 3) analisi per la ricerca di soluzioni a problemi; 4) sintesi e semplificazione delle conclusioni; 5) limpidezza di linguaggio; 6) facoltà di astrazione; 7) deduzione logica.

2. Il modello statistico di Maxwell-Boltzmann

L'ipotesi dell'equiprobabilità

La meccanica statistica è un ramo della fisica che studia il comportamento e le proprietà medie di sistemi costituiti da un numero molto grande di particelle: lo strumento di queste analisi sono i metodi e le tecniche della statistica applicati alla descrizione del moto delle particelle. La statistica di Maxwell-Boltzmann è stata ricavata nell'ambito dello studio della teoria cinetica dei gas, nella quale si assume che le molecole interagiscono tra di loro molto debolmente e solo durante le collisioni: si possono, cioè, trascurare tutti gli altri tipi di forze possibili. I principali protagonisti che, con le loro ricerche, hanno ampliato l'orizzonte della meccanica newtoniana fino alle dimensioni atomiche sono stati Bernoulli, Brown, Joule, Einstein, Maxwell, Boltzmann, Gibbs, Perrin, Stern e molti altri.

Per ottenere la legge di distribuzione di Maxwell-Boltzmann, consideriamo un sistema classico, ovvero un sistema composto da particelle identiche ma distinguibili. Uno stato macroscopico di tale sistema è caratterizzato dal numero totale di particelle e dall'energia totale: nel caso di particelle classiche, che sono distinguibili, ad ogni stato macroscopico corrispondono diversi stati microscopici o microstati ognuno dei quali è caratterizzato da una assegnata probabilità. Per fare questo si deve introdurre l'ipotesi che tutti i microstati corrispondenti alla stessa energia totale sono equiprobabili. La distribuzione che si ottiene all'equilibrio, pertanto, è quella che ha la massima probabilità di realizzarsi. Ogni microstato è specificato dal numero di componenti (particelle) per ciascun livello energetico. Utilizzando la distribuzione di Boltzmann ricaveremo, per un gas di particelle "classiche" contenute in una scatola di volume V, la distribuzione di Maxwell-Boltzmann delle velocità molecolari. Sia N il numero totale di molecole contenute nel volume V dato. Le ipotesi del modello sono:

1) le molecole interagiscono solo mediante le collisioni; le molecole interagiscono molto debolmente tra di loro mediante urti totalmente elastici; 2) l'energia potenziale è costante (per scelta uguale a zero); 3) il volume

occupato dalle molecole è trascurabile rispetto al volume del contenitore (gas rarefatto); 4) le particelle sono identiche ma distinguibili; 5) tutti i microstati corrispondenti alla stessa energia totale sono equiprobabili; 6) si possono trascurare tutti gli altri tipi possibili di forze.

In queste ipotesi è possibile applicare il principio di massima verosimiglianza. Per calcolare la probabilità di un microstato, nell'ipotesi di equi-probabilità, è sufficiente contare il numero di modi in cui si può realizzare il microstato stesso. Si supponga quindi che il numero totale delle componenti sia N e che ci sia un certo numero n di livelli occupati con determinati numeri di occupazione $N_1, N_2, \ldots\ldots N_S$. Consideriamo, poi, una particolare partizione delle N particelle negli stati ϵ_i con i=1, …, S. Tenendo presente le ipotesi del modello proposto, possiamo dire che la distribuzione che si ottiene all'equilibrio è quella che ha la massima probabilità di realizzarsi. Si tratta, dunque, di un problema di massimizzazione vincolata per la cui risoluzione si può applicare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Tale metodo consiste nel massimizzare la funzione:

$$L(n_1, n_2, \ldots\ldots n_S, \alpha, \beta)$$

$$= ln\ ln\ W - \alpha\left(\sum_{i=1}^{S} n_i - N\right) - \beta\left(\sum_{i=1}^{S} n_i \epsilon_i - E\right)$$

soggetta ai seguenti vincoli in quanto, per ipotesi, il sistema è chiuso ed isolato:

$$\sum_{i=1}^{S} n_i = N \quad ; \quad \sum_{i=1}^{S} n_i \in_i = E$$

All'equilibrio le particelle sono disposte nella configurazione di massima probabilità soggetta ai seguenti vincoli: a) la conservazione del numero totale N di molecole è $N = \sum_i \quad N_i$; b) la conservazione dell'energia totale è $U = \sum_{r=1}^{N} \quad E_r$. L'espressione della legge di distribuzione di Maxwell-Boltzmann all'equilibrio è pertanto:

$$n_i = \frac{N}{Z} g_i\ e^{-\beta \epsilon_i}$$

Il parametro β può essere determinato ricordando la relazione con l'energia totale del sistema. Basta a tale scopo definire il parametro T, temperatura assoluta, in modo tale che:

$$K_B T = \frac{1}{\beta}$$

con $K_B =$ costante di Boltzmann$= 1{,}38 * 10^{-23} \frac{J}{K} = 8{,}617 * 10^{-5} \frac{eV}{K}$. Tale relazione costituisce la definizione statistica di temperatura assoluta (notiamo che questa definizione di temperatura è valida solo all'equilibrio, poiché β è stato introdotto durante il calcolo della partizione più probabile). Stante le ipotesi fatte, si può applicare al sistema in oggetto la statistica di Boltzmann. Il primo passo da compiere è individuare quali siano gli stati accessibili ad una particella, cioè determinare la densità degli stati possibili (tenere presente che gli stati possibili non sono necessariamente occupati). Nel caso di molecole classiche tutte uguali ricaviamo la densità degli stati osservando che ogni particella si può trovare con la stessa probabilità in un qualunque volume elementare dV con energia $E = \frac{1}{2} m v^2$ (l'energia è solo cinetica). Il numero degli stati in cui la particella si può trovare è sicuramente proporzionale al volume elementare $dxdydx = dV$ (avendo supposto che la particella si possa trovare in tutti gli elementi di volume con la stessa probabilità). Inoltre osserviamo che, fissato l'elemento di volume dV, la particella può trovarsi in quel volume con un impulso qualunque di direzione arbitraria. Quindi gli stati possibili per una particella di energia $E = \frac{1}{2} m v^2$ sono quelli che si trovano nel volume di una calotta sferica di raggio v e volume elementare $4\pi^2 v^2 dv$ nello spazio individuato dalle componenti $v_x, v_{y,} v_z$ del vettore velocità $\vec{v}$. Il numero di stati possibili è dato quindi dal prodotto tra $4\pi^2 v^2 dv$ e l'elemento di volume dV. Si ha, pertanto:

$$4\pi^2 v^2 dv \, dV$$

La densità di stati possibili per unità di volume e unità di velocità è, quindi, uguale a:

$$D(v) = \frac{4\pi^2 v^2 dv\, dV}{dv\, dV} = 4\pi^2 v^2$$

Note la densità degli stati possibili $D(v)$ e la probabilità di occupazione di ciascuno stato, fornita dalla statistica di Boltzmann, possiamo determinare il numero degli stati occupati nei volumi elementari. Tale numero è dato dalla densità degli stati ammissibili moltiplicata per la statistica di Boltzmann. Si ha:

$$dN_{MB} = D(v) * A\, e^{-\frac{mv^2}{2KT}} dv\, dV$$

Il valore della costante A si determina imponendo che il numero totale di molecole sia N:

$$N = \int \quad dN_{MB} = \int \quad D(v) * A\, e^{-\frac{mv^2}{2KT}} dv\, dV$$

$$= 4\pi^2 VA \int \quad v^2 e^{-\frac{mv^2}{2KT}} dv$$

$$= \frac{KT}{m} * \sqrt{\frac{2KT}{\pi\, m}}$$

Pertanto, il numero totale di molecole è dato da:

$$N = 4\pi^2 VA * \frac{KT}{m} * \sqrt{\frac{2KT}{\pi\, m}}$$

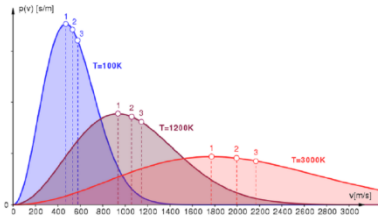
Per un sistema di molecole di massa m in equilibrio termico a temperatura assoluta T si ricava:

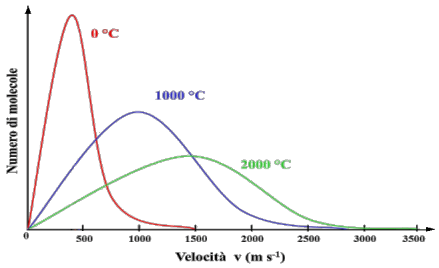
$$dn(v) = 4\pi * \left(\frac{N}{V}\right) * \left(\frac{m}{2\pi KT}\right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2KT}} dv$$

dove $dn(v)$ è il numero di particelle per unità di volume con velocità compresa fra $v\ e\ v + dv$. La distribuzione di Maxwell-Boltzmann è, quindi, la funzione:

$$\rho_{MB}(v) = \frac{dn_{MB}}{dv} = \frac{dN_{MB}}{dv\,dV} = 4\pi * \left(\frac{N}{V}\right) * \left(\frac{m}{2\pi KT}\right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2KT}}$$

dove $n_{MB}(v)$ è il numero di particelle per unità di volume e unità di velocità. Dalla distribuzione possiamo ricavare alcune quantità macroscopiche caratteristiche del gas come la pressione, la velocità con la massima probabilità, la velocità quadratica media e l'energia media delle molecole del gas in funzione della temperatura assoluta.





Questa curva presenta un punto di massimo; è rapidamente crescente nell'intorno sinistro di tale punto e decrescente (meno rapidamente) nell'intorno destro. Al crescere della temperatura, il valore massimo diminuisce e tende a spostarsi verso temperature maggiori: ciò corrisponde a quanto già noto circa il legame tra l'agitazione termica e la temperatura. L'ascissa di tale massimo, detta la moda della distribuzione della velocità, è facilmente calcolabile uguagliando a zero la derivata della funzione di Maxwell. Si ottiene, così, che la moda di tale distribuzione è:

$$v_{moda} = \sqrt{\frac{2\,K_B T}{m}}$$

La moda è la velocità più probabile, e non coincide con la velocità quadratica media, ma è pari all'82 % di essa. Tale valore non coincide neppure con il valor medio della velocità, perché la distribuzione non è simmetrica. Adoperando il formalismo dell'Analisi Matematica, si ha infatti:

$$\underline{v} = \sqrt{\frac{8\,K_B T}{\pi\, m}} = \sqrt{\frac{8}{3\,\pi}} < v > \cong 0{,}849 < v >$$

Per opera di Maxwell e di Boltzmann, le leggi statistiche, basate sul concetto di velocità, hanno fatto per la prima volta il loro ingresso nella Fisica. Prima di loro si pensava che tutto fosse regolato da leggi deterministiche e questo era influenzato anche dall'implicito determinismo insito nelle equazioni della Dinamica e nelle leggi della Gravitazione Universale. Purtroppo, quando dalla dinamica di un sistema di pochi corpi si passa a quella di un sistema formato da un numero enorme di particelle, cessa ogni certezza deterministica, e le uniche certezze che ci rimangono sono a livello di distribuzioni di probabilità.

3. Modelli cosmologici in fisica relativistica: introduzione

"I want to Know God's thoughts. The rest are ditails". A. Einstein

I primi trenta anni del secolo scorso, i cosiddetti anni d'oro della fisica, sono stati caratterizzati da un continuo succedersi di scoperte e di teorie fra le quali primeggiano, indubbiamente, la relatività einsteiniana e la meccanica quantistica. Queste due rivoluzioni culturali hanno mutato non solo il corso delle scienze, ma hanno anche influenzato nel bene e nel male la storia del nostro secolo. Difatti, verso la fine dell'800, il programma meccanicistico della fisica classica entrò in una crisi che assunse connotati sempre più gravi e poi addirittura drammatici. Ci vollero circa 50 anni per giungere a teorie nuove, capaci di studiare più ampiamente il sistema come quelle dei sistemi dinamici non lineari e del caos deterministico. La fisica relativistica e la fisica quantistica rappresentano non solo una delle eredità più feconde del diciannovesimo secolo sotto il profilo strettamente scientifico, ma anche un patrimonio culturale rispetto al quale l'uomo contemporaneo non può non confrontarsi, indipendentemente dal proprio ruolo nella società. La Relatività Generale rappresenta la prima teoria di campo a fare uso sistematico di equazioni non lineari (equazioni di Einstein), quello stesso tipo di equazioni che, dopo alcuni decenni, si dimostrarono capaci di rivoluzionare l'intero statuto epistemologico delle scienze, con la comparsa del caos deterministico e della complessità. Con la

Relatività Generale e con la Meccanica Quantistica il peso dell'apparato matematico nella fisica diventa sempre più rilevante. La fisica si allontana sempre più dall'esperienza diretta e dal senso comune. Nel corso dell'ultimo secolo, la relatività generale ha ricevuto un gran numero di conferme sperimentali, completando un'evoluzione comune a molte teorie rivoluzionarie: dapprima considerata un bizzarro modello matematico senza fini pratici, è diventata presto cruciale per spiegare molti fenomeni astrofisici, fino a essere oggi fondamentale anche per applicazioni quotidiane (basti pensare ai navigatori satellitari, che sarebbero inutilizzabili se non si tenesse conto degli effetti relativistici). Tra le sue previsioni più spettacolari ci sono fenomeni spesso controintuitivi, come per esempio la dilatazione del tempo in prossimità di un intenso campo gravitazionale, oppure l'effetto noto come "lente gravitazionale", che prevede la curvatura della luce stellare intorno a oggetti massivi (con conseguente deformazione o moltiplicazione della sorgente agli occhi di un osservatore). Ma le soluzioni delle equazioni della relatività generale hanno previsto anche i buchi neri (anch'essi considerati fino a un certo punto delle semplici curiosità matematiche, ma la cui esistenza in natura è oggi pressoché certa) e le onde gravitazionali, la cui prima storica osservazione nel 2015 ha rappresentato l'ultima conferma in ordine di tempo della teoria forse più iconica della fisica dell'ultimo secolo.

4. Modello cosmologico standard

Negli ultimi 70 anni circa, l'osservazione astrofisica ha fatto progressi tali da permettere di discriminare tra i modelli dell'universo costruibili matematicamente e selezionarne alcuni come più probabili. Questi ultimi sono noti oggi come i "modelli standard" o del "big-bang caldo". I dati alla base di questa scelta sono:

1. su scale abbastanza grandi da rendere trascurabili gli effetti locali, l'universo appare isotropo ed uniforme tanto da poter essere paragonato ad un gas le cui particelle attuali sono le galassie e i loro ammassi.

2. L'universo è in espansione. Tutti gli oggetti sono dotati di un moto di allontanamento reciproco descritto dalla legge di Hubble: $v = Hd$, dove v è la velocità di allontanamento, d la distanza degli oggetti ed H la costante di Hubble (o parametro di Hubble), il cui valore è compreso tra $50\ e\ 100\ \frac{Km}{s*Mpc}$.
3. L'universo è pervaso da un flusso isotropo di radiazione elettromagnetica (detta "radiazione fossile") il cui spettro di frequenza è simile a quello di un corpo nero alla temperatura di $2{,}7\ K$.
4. Nell'universo attuale la densità di energia associata alla materia supera di circa 1000 volte la densità di energia associata alla radiazione.
5. La materia conosciuta ha una densità di circa $10^{-31}\ \frac{g}{cm^3}$. Il suo costituente principale è l'idrogeno (circa il 75% in massa). Il resto è elio con tracce di elementi più pesanti.
6. Gli oggetti extragalattici di diversa età mostrano, su scale dei tempi cosmologiche, evidenza di evoluzione temporale.

L'applicazione della Relatività Generale nella descrizione dell'universo richiede la conoscenza di alcuni dati osservativi quali:

1. l'universo appare osservativamente omogeneo ed isotropo a grandi scale $(> 10\ Mpc)$.
2. L'universo è in espansione, come si deduce dal red -shift cosmologico.
3. La legge di Hubble, che quantifica il tasso di espansione dell'universo.

Dal punto di vista matematico, Einstein descrive lo spazio-tempo come uno pseudo-spazio di Riemann a quattro dimensioni. La sua equazione di campo:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

lega la curvatura in un punto al tensore energia in quel punto $T_{\mu\nu}$, essendo tale tensore dipendente dalla densità di materia ed energia. $R_{\mu\nu}$ è il tensore di curvatura di Ricci; R è lo scalare di curvatura di Ricci, cioè la traccia di $R_{\mu\nu}$; $g_{\mu\nu}$ è il tensore metrico; λ la costante cosmologica, $T_{\mu\nu}$ rappresenta il tensore energia-impulso; c la velocità della luce nel vuoto; G la costante di gravitazione universale. Il tensore $g_{\mu\nu}$ descrive la metrica dello spazio-tempo ed è un tensore simmetrico $4x4$ che, quindi, ha dieci componenti indipendenti, ma, date le quattro coordinate utilizzate, le equazioni indipendenti si riducono a sei. Per individuare la curvatura dello spazio-tempo e conoscere il percorso più breve fra due punti (geodetica), bisogna risolvere l'equazione di campo einsteiniana, il che vuol dire scoprire la "metrica" che la soddisfa, e determinare il valore ds^2 della metrica riemanniana valevole per una qualsiasi situazione prevista dall'equazione stessa. La prima soluzione di tali equazioni fu proposta da un combattente della prima guerra mondiale, Karl Schwarzschild (1873-19216), un brillante astronomo tedesco direttore dell'Osservatorio di Potsdam. La soluzione di Schwarzschild avrebbe reso possibile, successivamente, il concetto di buco nero.

Pertanto, nota la distribuzione delle masse, le equazioni di campo di Einstein

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = \chi\, T_{\mu\nu} \qquad \chi = 8\pi G$$

permettono di calcolare la geometria dello spazio-tempo. Esse rappresentano la base teorica fondamentale della relatività speciale, le cui soluzioni possono essere utilizzate per dedurre un particolare modello cosmico destinato a proporre una larga parte della storia dell'universo. Assegnare una data cosmologia in accordo con il Principio Cosmologico vuol dire ricavare il fattore di scala $R(t)$, che controlla la dinamica cosmologica del campo gravitazionale descritto da una metrica del tipo FLRW. Il modello cosmologico standard, formulato nella seconda metà del Novecento, si basa sui seguenti principi:

1. l'interazione gravitazionale su scale di distanze cosmologiche è correttamente descritta dalle equazioni della Relatività Generale.
2. Vale il principio cosmologico.
3. L'universo è in espansione (Legge di Hubble).
4. Si considera valido il modello standard delle particelle elementari.
5. Esiste una Radiazione Cosmica di Fondo (CMBR) e la radiazione presente a livello cosmico si trova in uno stato equilibrio termodinamico.

Le soluzioni più note usate in Cosmologia sono:

1) La metrica di Robertson-Walker, valida in quelle cosmogonie dove si assume valido il Principio Cosmologico trascurando nell'equazione di campo la costante cosmologica Λ, cioè ponendo Λ uguale a zero. Secondo le ipotesi fatte, la metrica in coordinate sferiche r, φ, ϑ è:

$$ds^2 = c^2dt^2 - R^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2(d\vartheta^2 + sen^2\vartheta d\varphi^2)\right]$$

dove $R(t)$ è il "fattore di scala" dell'Universo all'istante t (detto anche "parametro di espansione") e k è la costante che determina la geometria dell'Universo; k può assumere i valori $0, +1, -1$. Essa differisce dalla metrica di Minkowski per la relatività speciale, in quanto $R(t)$ dipende dal tempo, e per l'introduzione del fattore k. Quest'ultimo dipende dalla densità critica di materia presente.

2) La metrica FLRW (nota anche come metrica di Friedmann, Lemaitre, Robertson, Walker). E' una metrica di Riemann, con costanti cosmologiche Λ diverso da zero, che descrive a grande scala un universo isotropico in espansione o in contrazione.

La metrica FLRW viene utilizzata come prima approssimazione per il modello cosmologico standard del big bang per descrivere l'universo e i modelli che tengono conto della non omogeneità dell'universo sono aggiunti ad essa come estensioni. Tale metrica può essere scritta come

$$ds^2 = c^2dt^2 - R^2(t)\,[dr^2 + \underline{r}^2\,(d\theta^2 + sen^2\theta d\varphi^2)\,]$$

dove: R(t) = è il fattore di scala dell'universo al tempo t. Indicando con r la distanza co-movente dall'osservatore, $\underline{r}$ la distanza propria dall'osservatore e con R_C il valore assoluto del raggio di curvatura, si ottiene:

$$\bar{r} = \begin{cases} R_c sinh\left(\frac{r}{Rc}\right) & per\ curvatura\ negativa \\ r & per\ curvatura\ zero \\ R_c sin\left(\frac{r}{Rc}\right) & per\ curvatura\ positiva \end{cases}$$

Pertanto, l'obiettivo è quello di risolvere le equazioni di Einstein per la metrica FLRW che qui riportiamo:

$$ds^2 = c^2dt^2 - a^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2(d\vartheta^2 + sen^2\vartheta d\varphi^2)\right]$$

Consideriamo, dunque, le equazioni di campo di Einstein prive del termine cosmologico Λ e poniamoci in un sistema di varietà tale che $c = 1$:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \chi\, T_{\mu\nu} \qquad \chi = 8\pi G$$

Calcolando le varie componenti dei tensori sopracitati, per la metrica assegnata, si ottiene il sistema:

$$\begin{cases} H^2 = \frac{\chi}{3}\,\rho - \frac{k}{a^2} \\ \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{\chi}{6}(\rho + 3p) \end{cases} \qquad (1)$$

dove: $H = \frac{\dot{a}}{a}$ è il parametro di Hubble che esprime il rate di espansione dell'Universo, ovvero la velocità di espansione per unità di distanza. Le equazioni (1), così ottenute, dette "equazioni di Friedmann, non sono altro che una riscrittura delle equazioni di campo di Einstein con le ipotesi del "modello standard". Il sistema (1) fornisce le equazioni cosmologiche che governano la dinamica dell'Universo descritto dal "modello standard". Come coppia di soluzioni cosmologiche è possibile utilizzare anche il seguente sistema:

$$\begin{cases} H^2 = \frac{\chi}{3}\,\rho - \frac{k}{a^2} \\ \dot{\rho} + 3H\,(p+\rho) = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

ottenuto da una opportuna combinazione delle equazioni di Friedmann ma tale sistema non fornisce ulteriori informazioni sulla dinamica cosmologica. Vi sono poi soluzioni utilizzate per lo studio dei buchi neri derivate ponendo uguale a zero sia la costante cosmologica Λ sia il tensore energia-impulso. La maggior parte dei cosmologi crede che l'Universo osservabile sia ben approssimato da un modello FLRW con in più la presenza delle fluttuazioni primordiali in densità. Al meglio delle conoscenze attuali l'Universo sembra destinato ad espandersi per sempre. Nell'ipotesi che l'universo sia omogeneo, isotropico e a curvatura costante, l'equazione di campo può essere riscritta sotto forma di un'equazione differenziale scalare nel seguente modo:

$$\left(\frac{1}{R}\frac{dR}{dt}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{kc^2}{R^2}$$

Tale equazione è detta "equazione di Friedmann". R(t) rappresenta il "fattore di scala" dell'Universo ed esprime il raggio di curvatura del cosmo, ammesso che questo sia chiuso e abbia, quindi, una curvatura positiva. La quantità $\left(\frac{1}{R} * \frac{dR}{dt}\right) = H$ (parametro di Hubble o costante di Hubble) misura il ritmo di espansione dell'universo. Il valore di questo parametro, valutato al tempo presente H_0 è affetto da incertezza sperimentale:

$$H_0 = 100\,\frac{Km}{sec\ sec\ Mpc} * h \qquad con\ \ 0{,}5 < h < 0{,}71$$

Attualmente, l'intervallo di valori più attendibile per h è $0{,}65 < h < 0{,}71$. La legge di recessione delle galassie è stata scoperta nel 1929 da Hubble per via sperimentale, tuttavia, si può dimostrare che essa è diretta conseguenza dell'ipotesi di isotropia e omogeneità spaziale contenuta nella forma della metrica di FLRW. Dunque, tramite la legge di Hubble, la

conoscenza del fattore di scala R(t) rappresenta un mezzo con cui poter confrontare i risultati dei modelli teorici con i dati sperimentali.

5. La densità critica e il destino dell'Universo

La variabile decisiva per stabilire il destino dell'universo è la sua densità, confrontata con un valore detto densità critica, che è circa uguale a $5 * 10^{-27} \frac{Kg}{m^3}$ (che equivale a dire 3 atomi di idrogeno per ogni metro cubo di spazio) per un valore della costante di Hubble di $50 \frac{Km}{s*Mpc}$, oppure circa uguale a $1{,}9 * 10^{-26} \frac{Kg}{m^3}$ per un valore della costante di Hubble di $100 \frac{Km}{s*Mpc}$:

1. se la densità media della materia dell'universo è minore o uguale al valore di densità critica, allora l'universo si dice aperto. In questo caso la presente espansione dell'universo durerà per sempre.
2. Se invece la densità dell'universo è maggiore di tale valore critico, allora l'universo è chiuso ma senza confini (come la superficie di una sfera). In questo caso i campi gravitazionali sono abbastanza intensi per rallentare l'espansione dell'universo e in ultimo invertire il suo moto. L'universo, infine, collasserà fino a raggiungere una densità indefinitamente grande (il cosiddetto Big Crunch).

La densità critica dipende dalla costante di Hubble H e dalla costante di gravitazione universale G secondo la legge $\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}$

Il rapporto fra la densità dell'universo ρ e la densità critica ρ_c è detto "parametro di densità" Ω e risulta uguale a: $\Omega = \frac{\rho}{\rho_c} = \frac{8\pi G}{3H^2}\rho$

Il destino dell'universo cambia a seconda del valore di Ω. Pertanto, si ha:

1) se $\Omega < 1$, l'universo è aperto e si espanderà per sempre.
2) Se $\Omega = 1$, l'universo ha esattamente la densità critica, e l'espansione è ancora infinita.
3) Se $\Omega > 1$, l'universo è chiuso e collasserà su sé stesso a un certo istante, in un Big Crunch.

Il valore attualmente stimato di Ω è circa 0,3 ma il problema del destino dell'universo e della sua struttura è tuttora aperto. Dalla conoscenza dell'attuale velocità di espansione dell'universo e dalla sua odierna densità media, possiamo affermare che l'universo si espande di un valore compreso fra il 5% e il 10% ogni miliardo di anni. I dati attualmente disponibili ci dicono che probabilmente l'universo continuerà ad espandersi. "Ma non scommetteteci troppo. Tutto ciò di cui possiamo dirci veramente sicuri è che anche qualora l'universo fosse destinato a collassare, ciò non accadrebbe, comunque, prima di altri dieci miliardi di anni. Non ci dovremmo, quindi, preoccupare troppo visto che, per allora, il genere umano sarà già scomparso da parecchio tempo, essendo destinato- a meno di fondare colonie al di fuori del sistema solare- a estinguersi assieme al nostro sole." (Stephen Hawking- La teoria del tutto-Rizzoli)

6. Introduzione alla Meccanica Statistica

La meccanica statistica si è sviluppata nel corso del XIX secolo principalmente per merito del fisico inglese James Clerk Maxwell, del fisico austriaco Ludwig Boltzmann e del fisico matematico J. Willard Gibbs. Negli anni Venti la meccanica statistica venne riformulata al fine di includere i nuovi principi della teoria quantistica. La natura delle particelle, infatti, così come viene intesa dalla teoria quantistica, è diversa da quella tipica della teoria classica, basata sui principi della meccanica di Newton. Le statistiche quantistiche sono applicate all'analisi di quei fenomeni macroscopici influenzati dal comportamento quantistico degli atomi. Le statistiche a cui obbediscono questi sistemi di particelle sono:

1) la statistica di Bose-Einstein, valida per particelle con spin intero chiamate "bosoni", le cui ipotesi sono:

a) le particelle sono indistinguibili;

b) la probabilità per una particella di occupare un certo stato aumenta all'aumentare del numero di particelle che occupano lo stato.

2) La statistica di Fermi-Dirac, valida per particelle con spin semi-intero, chiamate "fermioni" secondo la quale:

a) le particelle sono indistinguibili;

b) la probabilità per una particella di occupare uno stato è nulla se lo stato è già occupato da un'altra particella.

Due fermioni identici non possono occupare lo stesso stato quantico (Principio di esclusione di Pauli).

Entrambe le statistiche convergono alla statistica di Boltzmann quando la descrizione quantistica può essere trascurata e le particelle possono essere descritte classicamente. Nel modello standard delle particelle elementari, fermioni e bosoni sono le due categorie di particelle fondamentali: i quanti di materia e i quanti di forza. I fermioni (quanti di materia) corrispondono alle particelle che costituiscono la materia (nuclei, atomi, molecole) cioè i quark (di cui sono formati i protoni e i neutroni, costituenti del nucleo atomico), l'elettrone e il neutrino, più altre particelle (con le stesse interazioni) ma molto più pesanti e quindi instabili. I bosoni (quanti di forza), invece, sono particelle che, nella concezione duale onda-corpuscolo della MQ, sono i mediatori delle forze fondamentali che si esercitano tra le particelle elementari e che quindi ne determinano le interazioni. La statistica di Bose-Einstein, con l'introduzione dell'indistinguibilità delle particelle e la quantizzazione della loro energia, riesce, tra l'altro, a spiegare compiutamente due importanti fenomeni: la radiazione del corpo nero e l'annullarsi del calore specifico allo zero assoluto. La statistica di Fermi-Dirac, invece, rende conto di moltissimi altri fatti sperimentali introducendo il principio di esclusione di Pauli (1925) nella trattazione statistica di un gas di elettroni.

7. Applicazione della statistica di Bose-Einstein: determinazione dello spettro del corpo nero.

La prima distribuzione quantistica è dovuta al bengalese Nath Bose (1894-1974) che nel 1920 si occupò delle teorie di Albert Einstein secondo il quale le onde elettromagnetiche sono costituite da particelle chiamate fotoni. Secondo Einstein i fotoni sono indistinguibili tra loro, pertanto non si possono considerare diversi due fotoni aventi la medesima

energia. Einstein applicò la stessa idea a tutte le particelle con spin intero (in unità h/2π), di cui i fotoni sono un esempio; per questo oggi tali particelle sono chiamate bosoni, in onore di Bose. Applicando questa distribuzione agli atomi, i due fisici predissero l'esistenza di un nuovo, esotico stato della materia, chiamato condensato di Bose-Einstein, la cui esistenza è stata sperimentalmente dimostrata nel 1995. La distribuzione di Bose-Einstein è descritta dalla relazione

$$n_i = \frac{g_i}{e^{\frac{(E_i-\mu)}{K_B T}} - 1}$$

con $E_i > \mu$. In essa, n_i è il numero medio di particelle nello stato i; E_i è l'energia dell'i-esimo stato; μ è il potenziale chimico; K_B è la costante di Boltzmann; T è la temperatura assoluta. Il valore g_i dell'i-esimo livello è chiamato "degenerazione" di quel livello di energia. Si osservi che quest'ultima si trasforma nella distribuzione di Maxwell-Boltzmann per energie $(E_i - \mu) >> K_B T$.

Se indichiamo con w(n, g) il numero di modi di distribuire n particelle tra i g sottolivelli di un certo livello energetico si può dimostrare che $w(n, g)$ è dato da:

$$w(n, g) = \frac{(n + g + 1)!}{n!\ (g - 1)!}$$

Generalizzando, il numero di modi di distribuire n_i particelle in g_i sottolivelli, al variare di i, è il prodotto dei modi in cui ogni livello di energia può essere occupato:

$$W = \prod_i \quad w(n_i, g_1) = \prod_i \quad \frac{(n_i + g_i - 1)!}{n_i!\ (g_i - 1)!} \cong \prod_i \quad \frac{(n_i + g_i)!}{n_i!\ g_i!}$$

In questa approssimazione si assume che $g_i >> 1$.

Applicando lo stesso procedimento utilizzato per ottenere la statistica di Maxwell-Boltzmann, si deve determinare un insieme di n_i che massimizza la funzione W, con l'ipotesi che il sistema sia costituito da un numero prefissato di particelle e possegga un'energia prefissata, ovvero:

$$N = \sum \quad n_i \qquad E = \sum \quad n_i \in_i$$

Per determinare ciò applichiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. A questo scopo, si costruisce la funzione:

$$f(n_i) = ln\ ln\ W\ + \alpha\left(N - \sum \quad n_i\right) + \beta * \left(E - \sum \quad n_i \in_i\right)$$

Applichiamo la cosiddetta formula di Stirling per i fattoriali:

$$ln\ ln\ x! \cong xlnx - x$$

e teniamo conto dell'approssimazione $g_i >> 1$. Derivando parzialmente rispetto ad n_i la $f(n_i)$ così ottenuta, uguagliando a zero tale derivata e risolvendo rispetto a n_i, si ottiene:

$$n_i = \frac{g_i}{e^{\alpha+\beta E_i} - 1}$$

In base a considerazioni termodinamiche, si può dimostrare che: $\beta = \frac{1}{K_B T} \quad e \quad \alpha = -\frac{\mu}{K_B T}$. Sostituendo questi valori nella relazione

$$n_i = \frac{g_i}{e^{\alpha+\beta E_i} - 1}$$

si ottiene che la distribuzione di Bose-Einstein è descritta dalla formula:

$$n_i = \frac{g_i}{e^{\frac{(E_i - \pi)}{K_B T}} - 1}$$

Si osservi che quest'ultima si trasforma nella distribuzione di Maxwell-Boltzmann per energie $(E_i - \mu) >> K_B\ T$.

Per determinare la distribuzione della densità di energia elettromagnetica e, quindi, lo spettro di emissione del corpo nero, applicando la statistica di Bose-Einstein, cominciamo col definire cosa si intende per corpo nero. Si definisce corpo nero un oggetto capace di assorbire la radiazione elettromagnetica incidente per qualsiasi lunghezza d'onda λ. Nel 1860 il fisico tedesco Gustav Kirchhoff, con l'utilizzo della termodinamica,

dimostrò che ad una data frequenza ν e ad una data temperatura T, il rapporto tra potere emissivo e potere assorbente è lo stesso per tutti i corpi: quindi il loro rapporto definisce una funzione universale $f(\nu, T)$:

$$\frac{e(\nu, T)}{a(\nu, T)} = f(\nu, T)$$

Kirchhoff definì, poi, corpo nero un corpo il cui potere assorbente, per ogni frequenza e temperatura, è pari ad uno. Da questo deriva che la funzione universale $f(\nu, T)$ eguaglia il potere emissivo: $e(\nu, T) = f(\nu, T)$. La radiazione di corpo nero, come tutti i sistemi all'equilibrio termico, può essere dedotta applicando il primo e il secondo principio della termodinamica. Si ottiene, così, la legge di Stefan-Boltzmann: $u(T) = aT^4$ che mette in relazione l'energia di radiazione con la quarta potenza della temperatura. Per determinare lo spettro di emissione del corpo nero, cerchiamo di determinare una legge per l'intensità della radiazione B_λ in funzione della lunghezza d'onda λ. A tale scopo possiamo seguire due approcci: l'approccio classico di Rayleigh-Jeans che si basa sui principi della fisica newtoniana e dell'elettromagnetismo classico; 2) l'approccio quantistico di Planck. Non prendiamo in esame l'approccio classico di Rayleigh e Jeans già ampiamente noto in letteratura. La legge di Rayleigh e Jeans, dedotta usando principi classici in cui la radiazione è trattata come un'onda che, ad ogni frequenza, può essere emessa con qualunque energia, diverge per piccole lunghezze d'onda, prevedendo un'emissione altissima per lunghezze d'onda corrispondenti all'ultravioletto e ai raggi X. La qual cosa non si osserva sperimentalmente. Questo problema viene chiamato "catastrofe ultravioletta", che una corretta teoria del corpo nero deve evitare. Per determinare ciò usiamo la procedura di media statistica con la distribuzione di Boltzmann:

$$f(\in) = C\, e^{-\frac{\epsilon}{KT}}$$

dove K è la costante di Boltzmann il cui valore è dato da: $K = 1{,}38 * 10^{-16}\ \frac{erg}{K}$. La $f(\in) = C\, e^{-\frac{\epsilon}{KT}}$, in meccanica statistica, dà la probabilità

che un oscillatore abbia energia compresa tra $\in e \ \in +d \in$. Pertanto, il valor medio dell'energia, in queste ipotesi, è dato da:

$$\underline{\in} = \frac{\int_0^\infty \ \in f(\in)\, d \in}{\int_0^\infty \ f(\in)\, d \in} = \frac{\int_0^\infty \ C \in e^{-\frac{\epsilon}{KT}}\, d \in}{\int_0^\infty \ C\, e^{-\frac{\epsilon}{KT}} d \in} = KT.$$

La legge di Rayleigh e Jeans, dedotta usando principi classici in cui la radiazione è trattata come un'onda che, ad ogni frequenza, può essere emessa con qualunque energia, diverge per piccole lunghezze d'onda, prevedendo un'emissione altissima per lunghezze d'onda corrispondenti all'ultravioletto e ai raggi X, e ciò non si osserva sperimentalmente. Questo problema viene chiamato "catastrofe ultravioletta", che una corretta teoria del corpo nero deve evitare. La soluzione alla catastrofe ultravioletta arrivò qualche anno dopo con l'introduzione da parte di Planck di una nuova ipotesi, dalle implicazioni sconvolgenti. Planck ipotizzò che la radiazione potesse essere emessa dagli oscillatori delle pareti solo a pacchetti discreti, detti "quanti" che, per ogni frequenza, potevano trasportare solo una ben precisa quantità di energia: $\in = h\nu$, dove h è una costante universale, detta "costante di Planck". Quindi, l'emissione ad una data frequenza può solo essere del tipo: $\epsilon_n = n\epsilon = nh\nu$. La modifica che questa ipotesi comporta rispetto a quanto fatto nel caso della legge di Rayleigh e Jeans riguarda solo il calcolo del valor medio dell'energia degli oscillatori. Infatti, in meccanica classica, usando la procedura di media statistica con la distribuzione di Boltzmann:

$$f(\in) = C\, e^{-\frac{\epsilon}{KT}}$$

dove K è la costante di Boltzmann il cui valore è dato da: $K = 1{,}38 * 10^{-16}\ \frac{erg}{K}$ che, in meccanica classica, dà la probabilità che un oscillatore abbia energia compresa tra $\in e \ \in +d \in$, possiamo calcolare il valor medio dell'energia dato da:

$$\underline{\in} = \frac{\int_0^\infty \ \in f(\in)\, d \ \in}{\int_0^\infty \ f(\in)\, d \ \in} = \frac{\int_0^\infty \ C \in e^{-\frac{\epsilon}{KT}}\, d \in}{\int_0^\infty \ C\, e^{-\frac{\epsilon}{KT}} d \in} = KT$$

valida nel caso della legge di Rayleigh e Jeans, diventa:

$$\underline{\in} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \quad \epsilon_n e^{-\frac{\epsilon_n}{KT}}}{\sum_{n=0}^{\infty} \quad e^{-\frac{\epsilon_n}{KT}}} = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{KT}} - 1}$$

Inserendo questo nuovo valore dell'energia media $\underline{\in}$ nella formula per il calcolo della densità di energia:

$$u(\nu)\, d\nu = \underline{\in}\, N(\nu)\, d\nu$$

si ottiene:

$$u(\nu)\, d\nu = \frac{8\,\pi\,\nu^2}{c^3} * \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{KT}} - 1}\, d\nu.$$

Per esprimere tale relazione in funzione di λ, ricordiamo che: $\lambda = \frac{c}{\nu}$. Utilizzando tali relazioni, abbiamo:

$$u(\lambda) = \frac{8\,\pi\,h\,c}{\lambda^5} * \frac{1}{e^{\frac{hc}{KT\lambda}} - 1}$$

che rappresenta la fondamentale legge di Planck per l'intensità di spettro del corpo nero. Essa risulta in perfetto accordo con i dati sperimentali se la costante di Planck viene fissata al valore $h = 6{,}626 * 10^{-27}\ erg * s$.

Con questa assunzione non solo si dà ragione dei dati sperimentali, ma si possono giustificare le leggi empiriche di Stefan-Boltzmann e quella di Wien. Difatti, nel caso in cui $h\nu \ll KT$, (ovvero per fotoni a bassa energia), si ottiene la formula di Rayleigh e Jeans: $B(\nu, T) \cong 2\frac{h\,\nu^3\,K\,T}{c^2\,h\nu} = 2KT * \left(\frac{\nu}{c}\right)^2$. Per i fotoni ad alta energia, invece, ovvero per $h\nu \gg KT$, l'esponenziale risulta così grande che il termine unitario nella formula può essere trascurato, ottenendo la legge dello spostamento di Wien. Si ha, pertanto:

$$h\nu \gg KT \quad \rightarrow\rightarrow B(\nu, T) \cong 2\frac{h\,\nu^3}{c^2} * e^{\frac{-h\nu}{KT}}$$

Possiamo, infine, utilizzare la legge dello spostamento di Wien per caratterizzare il range di frequenza in cui vale l'approssimazione di

Rayleigh e Jeans e il range in cui vale, invece, l'approssimazione di Wien. In tal modo si ottiene:

1) $\nu \ll \nu_{max}$ è possibile applicare la legge di Rayleigh-Jeans;
2) $\nu \gg \nu_{max}$ vale l'approssimazione di Wien.

8. Quantum statistic: la distribuzione di Fermi-Dirac

La distribuzione di Bose-Einstein non è l'unica distribuzione quantistica conosciuta. I due grandi fisici Enrico Fermi (1951-1954) e Paul Adrien Maurice Dirac (1902-1984), due tra i padri nobili della Meccanica Quantistica, nel 1926 ne introdussero un'altra, detta distribuzione di Fermi-Dirac in loro onore, valida non per i bosoni ma per i fermioni. Queste ultime sono particelle a spin semintero (in unità h/2π) che obbediscono al Principio di Esclusione di Pauli, secondo il quale non possono esistere nello stesso stato quantistico due fermioni aventi gli stessi numeri quantici. In altre parole, i fermioni sono distinguibili fra di loro, a differenza dei bosoni che risultano indistinguibili. Supponiamo, quindi, che siano verificate le seguenti ipotesi:

1. le particelle sono identiche e indistinguibili;
2. le particelle obbediscono al principio di esclusione di Pauli, cioè due particelle non possono trovarsi nello stesso stato dinamico e la funzione d'onda complessa deve essere antisimmetrica.

Tali tipi di particelle vengono dette "fermioni". Si vuole determinare il numero delle distribuzioni distinguibili di n_i particelle tra i livelli degeneri g_i. In meccanica quantistica g_i corrisponde ai differenti stati quantistici aventi la stessa energia, cioè alla "degenerazione" del livello di energia. Naturalmente g_i (massimo numero di fermioni che possono trovarsi su un dato livello) deve avere un valore tale da non violare il principio di esclusione di Pauli. Supponiamo di avere n_i particelle. Il numero di modi di distribuire n_i particelle su g_i stati di energia ε_i è:

$$\frac{g_i!}{(g_i - n_i)!}$$

In questo modo, però, considero distinte le distribuzioni che si ottengono permutando le particelle tra loro, cosa che non posso fare in quanto le particelle sono tra loro indistinguibili. Pertanto, nell'ipotesi che le particelle siano indistinguibili, la relazione precedente va divisa per n_i ! ottenendo così:

$$\frac{g_i!}{n_i!(g_i-n_i)!}.$$

Se ora disponiamo tutte le particelle sui diversi livelli energetici E_i, si ha:

$$P = \frac{g_1!}{n_1!\,(g_1-n_1)!} * \frac{g_2!}{n_2!\,(g_2-n_2)!} * \frac{g_3!}{n_3!\,(g_3-n_3)!} * \ldots . = \prod_i \quad \frac{g_i!}{(g_i-n_i)!}$$

Per determinare la distribuzione più probabile, assumiamo che all'equilibrio statistico le particelle siano disposte nella configurazione di probabilità massima. Questa funzione deve essere massimizzata con i vincoli:

$$\sum_i \quad g_i\, n_i = N$$

$$\sum_i \quad g_i\, n_i E_i = E$$

Applicando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange che riduce l'analisi ad una massimizzazione semplice di una funzione in n_i si ottiene:

$$L(n_1, n_2, \ldots \ldots . n_S, \alpha, \beta) = ln\ ln\ P - \alpha\left(\sum_{i=1}^{S} \quad n_i g_i - N\right) - \beta\left(\sum_{i=1}^{S} \quad g_i\, n_i E_i - E\right)$$

con $\alpha\ e\ \beta$ parametri da determinare. Perché la funzione ammetta estremo vincolato le sue derivate parziali devono essere nulle. Così procedendo, di ottiene:

$$n_i = \frac{g_i}{e^{\alpha * \beta \epsilon_i} + 1}$$

che è la legge di distribuzione di Fermi-Dirac. Tale equazione fornisce i valori $n_1, n_2, \ldots\ldots n_S$ per la distribuzione più probabile, all'equilibrio. Da considerazioni termodinamiche si ha che $\beta = \frac{1}{KT}$.

Se si definisce l'energia di Fermi E_F data da $E_F = -\alpha KT$ si ha:

$$n_i = \frac{g_i}{e^{\frac{(E_i - E_F)}{KT}} + 1}.$$

Da ciò si evince che, per $T = 0$, tutti gli stati di energia fino a $E = E_F$ sono occupati ($n_i = g_i$), mentre quelli con $E > E_F$ sono vuoti ($n_i = 0$). Questo segue da

$$\lim_{T \to 0} e^{(E_i - E_F)/KT} = \begin{cases} 0 & per \quad E_i - E_F < 0 \\ \infty & per\ E_i - E_F > 0 \end{cases}$$

L' analisi dei casi trattati si può affermare che:

a. la statistica di Maxwell-Boltzmann si applica ai gas di molecole a temperatura ambiente o a temperature più alte.

b. La statistica di Bose-Einstein si applica ai gas di bosoni, in stato di degenerazione. I bosoni sono particelle a cui non si applica il principio di Pauli, e non hanno spin o hanno spin intero come ad esempio: fotoni, fononi, mesoni, mesoni K, gas reali (idrogeno ed elio).

c. La statistica di Fermi-Dirac si applica ai gas di fermioni che, oltre ad essere in stato di degenerazione, sono anche soggetti al principio di Pauli. I fermioni sono particelle che hanno spin semintero come ad esempio: elettroni, protoni, neutroni. Quest'ultima distribuzione viene spesso usata per lo studio degli elettroni nei solidi, e quindi costituisce la base per la teoria dei semiconduttori e dell'elettronica, avendo reso possibile scoperte come quella del transistor. Possiamo quindi dire che l'applicazione di una o dell'altra statistica dipende dal tipo di particelle coinvolte e anche dalle particolari condizioni fisiche in cui queste particelle si trovano. La distribuzione di Maxwell-Boltzmann rappresenta il limite classico in condizioni non degeneri e ad alta temperatura delle distribuzioni di Bose-Einstein e di Fermi-Dirac: infatti, ad alta temperatura, la maggior parte dei

sistemi si comporta analogamente a quelli classici, ovvero le differenze tra fermioni e bosoni sono trascurabili a meno che essi abbiano una densità molto alta, come ad esempio in una nana bianca. Osserviamo, infine, che le tre statistiche possono essere riscritte insieme con l'espressione:

$$\frac{g_i}{n_i} + d = e^{\alpha + \frac{\epsilon_i}{KT}}$$

ove

1. $d = 0$ per la statistica di Maxwell-Boltzmann;
2. $d = -1$ per la distribuzione di Fermi-Dirac;
3. $d = +1$ per la distribuzione di Bose-Einstein.

Per $\frac{n_i}{g_i} \ll 1$, cioè per sistemi molto rarefatti, ad esempio per alte temperature, le due statistiche quantistiche sono equivalenti a quella classica di Maxwell-Boltzmann. La fisica si è sempre occupata di fenomeni prevedibili e ripetibili. Da tempo, però, la fisica si è dovuta arrendere di fronte alla complessità dei fenomeni comuni che non sempre mostrano la caratteristica della prevedibilità. Eppure, nonostante tutto, anche questa "complessità" che sembra sfuggire ai principi dell'ordine, può essere descritta da regole e leggi della meccanica statistica, della meccanica quantistica e della cromodinamica quantistica. La teoria della complessità evidenzia, difatti, come alcuni fenomeni complessi, quali la superconduttività e la superfluidità, possono emergere solo dall'interazione coerente delle componenti microscopiche del sistema. Numerose sono, oggi, le applicazioni della meccanica statistica quali, ad esempio, solo per citarne alcune: 1) lo studio dei comportamenti collettivi in biologia: stormi, sciami e colonie. 2) La propagazione rapida dell'informazione. 3) Le dinamiche sociali: linguaggio, opinioni, consenso, innovazione. 4) I fenomeni emergenti in economia: complessità /diversificazione della produzione. 5) I sistemi disordinati e vetrosi. 6) Problemi di ottimizzazione. 7) Reti biochimiche. Sia la meccanica statistica che la meccanica quantistica giocano un ruolo fondamentale non solo nella comprensione dei sistemi complessi ma anche nella dinamica caotica. La teoria del caos mostra come

persino un sistema fisico deterministico possa risultare impredicibile. I sistemi descritti da modelli caotici sono spesso di grande complessità. La scienza del caos ha trovato applicazioni in moltissimi campi: dalla meteorologia alla medicina, dalla dinamica dei fluidi alla biologia, dall'elettromagnetismo all'ottica laser.

9. Conclusioni. Mutamenti nel quadro scientifico ed epistemologico

La Relatività e la Meccanica Quantistica hanno sollevato, sin dal loro apparire, una serie di problemi concettuali che non potevano non avere anche delle ripercussioni filosofiche riguardo a: 1) spazio e tempo; 2) relatività e oggettività; 3) materia ed energia; 4) causalità e casualità; 5) fisica geometrica/dinamica; 6) fisica locale/globale. Ci troviamo, ora, di fronte, a due tendenze: 1) l'una che conduce a ridurre la fisica a geometria dello spazio-tempo arricchito nel numero delle sue dimensioni, interpretate con vari significati fisici; 2) l'altra che conduce a diversificare i ruoli dello spazio e del tempo in una prospettiva "dinamica" nella quale entrano in gioco: a) l'instabilità, la caoticità e, comunque l'asimmetria (freccia) del tempo; b) l'irreversibilità termodinamica dei sistemi in non equilibrio, tipica della complessità e del mondo biologico.

Oggi siamo ancora alla ricerca di una teoria unitaria, ma il quadro delle scienze sta cambiando profondamente. Da un lato si sta perseguendo la strada della unificazione aperta dalla Relatività e dalla Teoria Quantistica dei campi, oggi impegnata tra l'altro nell'impresa non facile di "quantizzare la gravitazione". Dall'altro, e contemporaneamente, ci si è imbattuti nel problema della "non linearità" ormai inevitabile anche a causa della stessa Relatività Generale che l'ha introdotta per prima con la comparsa della instabilità e del caos deterministico e non sappiamo ancora quale sarà l'esito di tutto questo. Quello che ancora si può forse aggiungere a conclusione di queste osservazioni è il fatto che la scienza oggi sta cercando di superare il classico metodo del riduzionismo, che appare ormai insufficiente a far progredire la conoscenza scientifica della natura. Per la fisica, in prima

istanza almeno, ciò sembra significare la necessità di non limitarsi a teorie rette da “equazioni lineari” per le quali la somma di due soluzioni è ancora una soluzione e quindi il tutto viene ottenuto come somma delle parti. E la Relatività Generale è stata la prima teoria “a esigere che la legge invariante più semplice non sia né lineare né omogenea nelle equazioni di campo e nelle loro derivate” (Einstein). Tuttavia essa è ancora, in qualche modo, una teoria locale nel senso che, facendo uso della geometria differenziale, la struttura di spazio vettoriale che utilizza è necessariamente locale, basata cioè sul fatto che, nell’intorno di un punto, ogni spazio viene approssimato da uno spazio lineare. Ma questo non è tanto un limite proprio della Relatività quanto una caratteristica di tutta la matematica che si basa sul calcolo differenziale e integrale che è, per sua natura, riduzionistico. Ma, per ora, non possediamo ancora una matematica diversa e non sappiamo neppure se, in futuro, potremmo disporne.

Bibliografia

Landau L.D, Lifsits E. M., Fisica Statistica, Fisica Teorica, Vol. 5/1, Editori Riuniti, Roma, 2010.

M. W. Zemansky, M. W., Dittman, R. H., Heat and Thermodynamics,7th edition, McGraw Hill, Singapore, 1997.

Hill T. L., An Introduction to Statistical Thermodynamics, Dover Publications, New York, 1988.

Francaviglia M., M. Polese M., I fondamenti epistemologici della Relatività Generale e la sua “eredità matematica” - Bollettino UMI, Serie VIII, Vol. III-A, Agosto 2005.

Gasperini M, Relatività Generale e Teoria della Gravitazione, Springer Verlag, 2024.

Mandrone M.I., Relatività Generale: Dallo spazio piatto di Minkowski allo spazio curvo di Riemann, VS Grafica, Pietrelcina, 2017.

La Pigna matematica

Mariagrazia Santella, Rosanna Ramacciato
Liceo Scientifico "A. Romita" Campobasso
mariagrazia.santella@gmail.com
rosanna.ramacciato@liceoscientificoromita.edu.it

Sunto- *Il processo della panificazione, conosciuto fin dall'antichità, consente la produzione di diversi prodotti lievitati da forno. Si conoscono tre tipi di lievitazione, la lievitazione fisica, la lievitazione chimica e la lievitazione biologica. Noi abbiamo analizzato la lievitazione di tipo biologico. E' il processo più importante e più antico. La lievitazione biologica avviene attraverso la produzione di anidride carbonica mediante fermentazione del lievito: gli zuccheri in esso contenuti vengono demoliti con produzione di anidride carbonica che, rimanendo imprigionata nell'impasto, consente il rigonfiamento dello stesso. I protagonisti principali di questo procedimento sono: il lievito madre o il lievito di birra. I fattori che influenzano il processo della lievitazione sono: la tipologia di lievito utilizzata, la temperatura e l'azione manuale meccanica per la lavorazione dell'impasto. La temperatura ha un'influenza diretta ed il nostro studio ha riguardato l'osservazione del processo di lievitazione a tre diverse temperature, a circa 5°C, 25°C e 38°C. Il prodotto del quale abbiamo osservato la lievitazione è la pigna di Pasqua molisana. La pigna pasquale è un lievitato tipico della tradizione molisana che racconta secoli di storia, fede e sapori autentici. Ha origini antiche e, per devozione, si porta sulla tavola della colazione la mattina di Pasqua. La ricetta antica, che è stata da noi utilizzata, prevede un rimpasto con conseguente seconda lievitazione. Per conoscere in modo approfondito il processo di lievitazione, oltre che dal punto di vista chimico e biologico, abbiamo modellizzato la crescita dell'impasto alle diverse temperature per osservare come essa potesse influenzare e modificare questo processo che avviene in natura. La lievitazione è stata analizzata mediante modelli matematici e abbiamo ottenuto come risultato che alla temperatura di circa 5°C è avvenuta seguendo un modello logaritmico, alla temperatura di circa 25°C è avvenuta seguendo un modello lineare, alla temperatura di circa 38°C è avvenuta seguendo un modello esponenziale. Anche la lievitazione del rimpasto è stata osservata e modellizzata alle diverse temperature.*

Parole chiave: Panificazione; Lievito; Crescita; Anidride carbonica; Modellizzazione Matematica; Funzione logaritmica; Funzione lineare; Funzione esponenziale; Traslazione; Dilatazione

Abstract- *The bread-making process, known since ancient times, enables the production of various leavened baked goods. Three types of leavening are recognized:*

physical, chemical, and biological. We analyzed biological leavening. This is the most important and ancient method. Biological leavening occurs through the production of carbon dioxide via yeast fermentation: sugars are broken down to produce carbon dioxide, which becomes trapped in the dough, causing it to rise. The key agents in this process are sourdough starter or brewer's yeast. Factors influencing the leavening process include the type of yeast used, the temperature, and the manual or mechanical working of the dough. Temperature has a direct impact; our study focused on observing the leavening process at three different temperatures: approximately 5°C, 25°C, and 38°C. The product whose leavening process we studied is the Easter pine cone cake from Molise. This Easter pine cone cake is a traditional leavened bread from the region, embodying centuries of history, faith, and authentic flavors. It has ancient origins and, as an act of devotion, is served at the Easter morning breakfast table. The traditional recipe we used involves a second kneading step followed by a second rise. To gain a deeper understanding of the leavening process, beyond just the chemical and biological aspects, we modeled the dough's expansion at various temperatures to observe how temperature influences and alters this natural process. Leavening was analyzed using mathematical models; the results showed that at a temperature of approximately 5°C it followed a logarithmic model, at approximately 25°C a linear model, and at approximately 38°C an exponential model. The leavening of the re-mixed dough was also observed and modeled at the various temperatures.

Keywords: Bread Making; Yeast; Growth; Carbon Dioxide; Mathematical Modeling; - Logarithmic function - Linear function - Exponential function – Translation - Scaling

1. Storia ed origini della pigna

La pigna pasquale è un lievitato tipico della tradizione molisana. Ha origini antiche e, per devozione, si porta sulla tavola della colazione la mattina di Pasqua. In Molise la pigna pasquale nata come un "pane dolce" preparato per celebrare la Pasqua è conosciuto come “u pccillate”. Il dolce ha radici contadine; le massaie preparavano la pasta già dalla Domenica delle Palme, lasciandola lievitare dalle dodici alle trentasei ore al massimo.

La sua preparazione si basa sulla lievitazione naturale, ottenuta con il lievito madre. Questo è un impasto formato semplicemente da farina e acqua che, grazie alla fermentazione spontanea, sviluppa un complesso insieme di lieviti e batteri lattici naturali.

La pigna di Pasqua, nella tradizione, ha una simbologia molto profonda e radicata. Rappresenta simbolicamente la morte e la resurrezione del Cristo Salvatore, raccontando la storia della fede attraverso la lievitazione.

La sua forma a ciambella richiama l'eternità, mentre il processo di lievitazione evoca la rinascita e la crescita spirituale.

2. L’influenza diretta della temperatura sul processo di panificazione

Nel processo di panificazione, stabilito il lievito da utilizzare, il fattore che influenza in modo significativo la crescita dell’impasto è la temperatura. Per la nostra pigna abbiamo deciso di utilizzare il lievito madre e di realizzare l’impasto presso una pasticceria artigianale locale, che si è attenuta scrupolosamente alla ricetta antica.

Il nostro studio ha riguardato l’analisi del processo di lievitazione a differenti temperature. L’attività didattica è stata condotta nella classe IV sezione B del Liceo Scientifico “A. Romita” di Campobasso.

3. Ingredienti della tradizione

Gli ingredienti per una sola pigna sono:

- Farina 0 350 W: 1 kg per la base dell’impasto.
- Uova: 6 uova per la struttura dell’impasto.
- Olio di oliva: 1 bicchiere per la lavorazione dell’impasto.
- Patate lesse: 400 grammi per morbidezza e profumo.

- Zucchero: 400 grammi di semolato per dolcezza.
- Scorza di limone: biologico grattugiato per profumo o cannella.
- Lievito madre: 125 grammi, è l'ingrediente che rende questo dolce unico e profumato.

3.1 Il lievito madre

Il lievito madre nasce spontaneamente dalla fermentazione naturale di farina e acqua, processo che si attiva grazie ai microrganismi autoctoni. Al suo interno si sviluppa un complesso insieme di lieviti (*Saccharomyces cerevisiae*) e batteri lattici naturali (*Lactobacillus Pediococcus*, *Leuconostoc*), naturalmente presenti nella farina, che permettono la fermentazione dell'impasto.

Il *Saccharomyces cerevisiae* è un organismo unicellulare appartenente al regno dei funghi, è responsabile della fermentazione alcolica e della lievitazione, fondamentali per ottenere pane, birra e vino.

Questo ingrediente antico è la chiave per ottenere la morbidezza e il profumo caratteristici della pigna pasquale.

3.2 Vantaggi del lievito madre

Profumo e Gusto Intensi. Il lievito madre migliora le caratteristiche organolettiche degli impasti: i prodotti risultano più profumati, con un gusto più intenso e aromatico grazie alla giusta proporzione tra l'acido lattico e l'acido acetico, 3 a 1, ottenuti durante la fermentazione.

Conservazione Prolungata. I batteri lattici e la leggera acidità dell'impasto rallentano lo sviluppo delle muffe ed il dolce risulta fragrante più a lungo.

Mollica Eccellente. Struttura della mollica migliorata con alveolatura fine.

Digeribilità Superiore. Il lievito madre rende gli alimenti più digeribili. Durante la fermentazione i microrganismi trasformano alcune sostanze complesse della farina in composti più semplici, che sono più facilmente assimilabili.

3.3 Il Processo di Preparazione

Cottura Patate. La preparazione inizia con la cottura delle patate. Una volta cotte, vengono scolate, lasciate raffreddare fino a raggiungere una temperatura di circa 35°C e poi sbucciate. Successivamente vengono schiacciate con uno schiacciapatate per ottenere una crema liscia e priva di grumi e vengono lasciate raffreddare completamente.

Prima Lavorazione. A questo punto si procede con la preparazione dell'impasto. Nella ciotola di una planetaria si uniscono la farina, lo zucchero, le patate lesse, l'olio e la scorza grattugiata di limone o cannella. Successivamente si aggiunge il lievito e si incorporano le uova e l'impasto viene lavorato per circa cinque minuti, fino a ottenere un composto liscio e leggermente appiccicoso.

Prima Lievitazione. La ciotola viene coperta con pellicola alimentare e lasciata riposare in un luogo asciutto e al riparo dalla luce per circa tre ore. L'impasto effettua così la prima lievitazione.

Seconda lavorazione. Il composto viene trasferito su una spianatoia leggermente infarinata e lavorato rapidamente, aggiungendo poca farina se necessario, fino a ottenere un panetto liscio, compatto e non più appiccicoso.

Seconda lievitazione. L'impasto viene poi sistemato in uno stampo di carta alimentare. Viene coperto con un canovaccio pulito e lasciato lievitare nuovamente per circa due ore, fino al raddoppio del volume.

Cottura. Il forno viene preriscaldato a 180°C. Prima della cottura, la superficie della pigna viene spennellata delicatamente con uovo sbattuto. La pigna viene infornata per 20 minuti fino a quando la superficie appare ben dorata. La copertura della pigna, dopo la cottura, è realizzata anche con una glassa di albume di uovo e zuccherini colorati.

Conservazione. La pigna pasquale molisana si conserva per diversi giorni. Se riposta in sacchetti per alimenti, può mantenersi morbida e fragrante per circa 7-10 giorni.

A questo punto ci siamo posti la domanda: "quali sono le reazioni chimiche che avvengono nel processo di lievitazione?".

4. Processo di lievitazione

La lievitazione è classificata in fisica, chimica e biologica. Noi abbiamo analizzato la lievitazione di tipo biologico.

La fermentazione è un processo metabolico anaerobico in cui i lieviti, in particolare il *Saccharomyces cerevisiae* ed i batteri trasformano gli zuccheri presenti nell'impasto in alcol, acidi organici, anidride carbonica ed energia.

L'anidride carbonica che si forma crea bolle nell'impasto, con conseguente rigonfiamento dello stesso permettendo così la lievitazione.

Le tre tipologie principali di fermentazione sono alcolica, lattica e malolattica.

La reazione chimica può essere schematizzata così:

$$C_6H_{12}O_6 \rightarrow 2C_2H_5OH + 2CO_2 + \text{ENERGIA (2ATP)}$$

(zucchero esoso → etanolo + anidride carbonica)

I lieviti agiscono sugli zuccheri in assenza di ossigeno, innescando il processo della fermentazione con produzione di Alcol etilico (CH_3CH_2OH) e di Anidride carbonica (CO_2) che si libera dall'impasto. La CO_2 forma bolle e fa crescere l'impasto e lo rende soffice.

La farina contiene due proteine la glutenina e la gliadina, la gliadina conferisce viscosità e plasticità e consente all'impasto di estendersi senza rompersi, la glutenina conferisce elasticità e tenacia ed aiuta l'impasto a mantenere la propria forma.

La glutenina e la gliadina si legano tra di loro durante l’impasto per formare il glutine, che a sua volta forma una maglia elastica dove rimane intrappolata l’anidride carbonica.

Fattori importanti per una lievitazione ottimale: manipolazione manuale, temperatura nella fase di riposo dell’impasto, tipo e forza della farina utilizzata (presenza o meno di glutenina e gliadina).

4.1 Le farine: classificazione e caratteristiche

La farina è il prodotto della macinazione o molitura della cariosside (chicco di grano). Le farine più raffinate (esempio 0 e 00) sono quelle che contengono meno minerali e provengono dalla parte più interna del chicco, sono quindi più ricche di amido, mentre le farine meno raffinate (fino all'integrale), contengono oltre alle fibre, anche minerali. Le farine più fini e bianche favoriscono la riproduzione dei lieviti e lo sviluppo del glutine.

Le altre farine di tipo 1 e 2, che contengono residui di endosperma e crusca, sono invece più ricche in minerali (ferro, fosforo, potassio, magnesio e sodio) e fibre.

Le farine cambiano per contenuto di proteine, forza (W), capacità di assorbire acqua, presenza di fibre e crusca, resa in lievitazione.

Ai fini della panificazione, è importante la forza della farina (W), che indica come la stessa si oppone alla deformazione del glutine trattenendo l’acqua, ossia denota la capacità di resistere nell'arco del tempo alla lavorazione. Maggiore è la forza e più la farina è adatta alla preparazione di prodotti che richiedono una lunga lievitazione.

5. L'esperimento

Il nostro studio ha riguardato l'analisi del processo di lievitazione a differenti temperature, per questo motivo abbiamo suddiviso ed inserito l'impasto in tre contenitori trasparenti e abbiamo misurato le altezze ogni 15 minuti per tre ore, annotandole per ognuna delle tre diverse temperature; dopo il rimpasto, la misurazione è avvenuta per altre due ore.

Abbiamo impiegato un tempo di lievitazione inferiore rispetto alla ricetta antica, che è stato sufficiente, perché la nostra quantità di impasto è stata modesta.

Gli impasti sono stati collocati in ambienti con temperature diverse (ideale, calda e fredda). Abbiamo poi calcolato i volumi rispettivi per ogni misurazione: $V = A_b \cdot h$

I dati raccolti sono i seguenti:

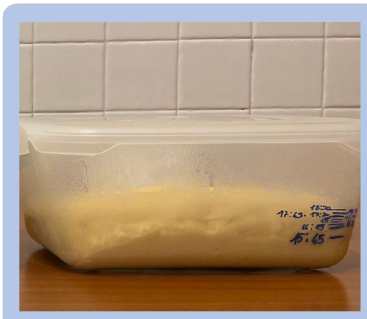
TEMPERATURA IDEALE (circa 25°C)			TEMPERATURA FREDDA (circa 5°C)			TEMPERATURA CALDA (circa 38°C)		
TEMPO intervalli di 15 minuti	MISURA Altezza impasto in cm	VOLUME in cm^3	TEMPO Intervalli di 15 minuti	MISURA Altezza impasto in cm	VOLUME in cm^3	TEMPO Intervalli di 15 minuti	MISURA Altezza impasto in cm	VOLUME in cm^3
15:45	2,1	739,2	15:45	2,1	739,2	15:45	2,1	739,2
16:00	2,4	844,8	16:00	2,4	844,8	16:00	2,3	809,6
16:15	2,8	985,6	16:15	2,9	1020,8	16:15	2,7	950,4
16:30	3,5	1232,0	16:30	3,6	1267,2	16:30	3,1	1091,2
16:45	4,0	1408,0	16:45	3,8	1337,6	16:45	3,7	1302,4
17:00	4,5	1584,0	17:00	4,1	1443,2	17:00	4,0	1408,0
17:15	5,1	1795,2	17:15	4,2	1478,4	17:15	4,6	1619,2
17:30	5,5	1936,0	17:30	4,5	1584	17:30	5,3	1865,6
17:45	6,1	2147,2	17:45	4,6	1619,2	17:45	6,7	2358,4
18:00	6,8	2393,6	18:00	4,7	1654,4	18:00	8,2	2886,4
18:15	7,5	2640,0	18:15	4,8	1689,6	18:15	9,6	3379,2
18:30	8,1	2851,2	18:30	5,1	1795,2	18:30	10,9	3836,8
18:45	8,7	3062,4	18:45	5,2	1830,4	18:45	12,3	4329,6

RIMPASTO								
TEMPERATURA IDEALE (circa 25°C)			TEMPERATURA FREDDA (circa 5°C)			TEMPERATURA CALDA (circa 38°C)		
TEMPO intervalli di 15 minuti	MISURA Altezza impasto in cm	VOLUME in cm^3	TEMPO Intervalli di 15 minuti	MISURA Altezza impasto in cm	VOLUME in cm^3	TEMPO Intervalli di 15 minuti	MISURA Altezza impasto in cm	VOLUME in cm^3
19:00	4,1	1443,2	19:00	4,7	1654,4	19:00	5,2	1830,4
19:15	4,8	1689,6	19:15	5,2	1830,4	19:15	6,6	2323,2
19:30	5,4	1900,8	19:30	5,5	1936	19:30	7,6	2675,2
19:45	5,8	2041,6	19:45	5,8	2041,6	19:45	8,5	2992,0
20:00	6,4	2252,8	20:00	6,0	2112,0	20:00	9,4	3308,8
20:15	6,9	2428,8	20:15	6,1	2147,2	20:15	10,3	3625,6
20:30	7,4	2604,8	20:30	6,3	2217,6	20:30	11,2	3942,4
20:45	8,0	2816,0	20:45	6,4	2252,8	20:45	12,0	4224
21:00	8,7	3062,4	21:00	6,5	2288,0	21:00	12,8	4505,6

5.1 Esperimento: temperatura e lievitazione

Abbiamo ottenuto la temperatura di circa 5°C ponendo l'impasto nel frigorifero; la temperatura di circa 25°C utilizzando il forno spento con la luce accesa e l'impasto coperto con un panno; la temperatura di circa 38°C ponendo l'impasto su un termosifone.

Temperatura Ideale
Coperto con panno nel forno con luce accesa 25° C
Risultato: Lievitazione ottimale, attiva e costante



Temperatura Fredda
Inserito nel frigo a circa 5°C
Risultato: Fermentazione rallentata per maturazione lunga, superiori alle 24 ore

Temperatura Calda
Coperto con panno sul termosifone a 38° C
Risultato: Lievitazione accelerata ma meno controllata

Successivamente, ci siamo posti anche questa domanda: "Il processo di lievitazione segue un andamento riconducibile ad un modello matematico?".

Abbiamo sistemato i dati raccolti in tabelle e poi li abbiamo rappresentati nel piano cartesiano, considerando le coppie ordinate formate dal tempo in minuti e dal volume in cm^3.

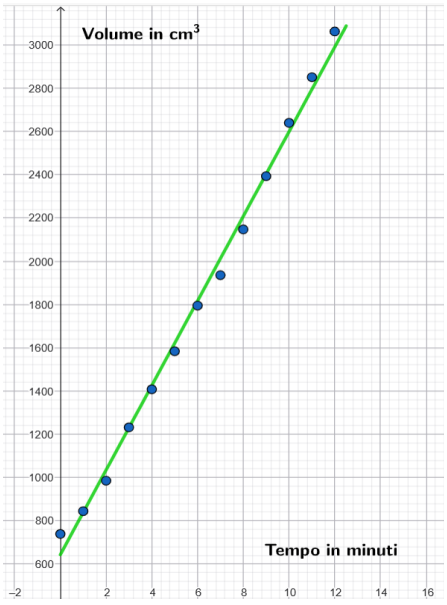
5.2 Equazione e grafico della lievitazione a temperatura ideale a circa 25°C

I punti rappresentati nel piano mostrano che essi possono essere approssimati da una funzione lineare.

Funzione lineare $y = 195{,}6x + 643{,}3 \; con \; 0 \leq x \leq 12{,}5$

L'equazione è stata determinata con il metodo del baricentro.

Il nostro modello lineare è un modello continuo e rappresenta la curva supporto del modello discreto costituito dai punti ottenuti dalle coppie ordinate (tempo; volume).



Nel grafico i tempi sono stati riscalati, ossia abbiamo considerato il tempo 0 all'inizio dell'osservazione quando il volume corrispondeva a quello iniziale dell'impasto posto in una delle tre vaschette. Il tempo 1 corrisponde ai primi 15 minuti, il tempo 2 corrisponde a 30 minuti e così via fino a raggiungere il tempo di tre ore.

Dal modello matematico e relativo grafico osserviamo che il processo è avvenuto con una crescita costante, di 195,6 cm^3 ogni 15 minuti, poiché legato a una temperatura considerata ideale. Il contenuto di glutine e gliadina ha favorito la lievitazione, così come l'azione meccanica manuale del primo impasto. La produzione di anidride carbonica è regolare e il glutine riesce a trattenere in modo efficace i gas.]

5.3 Equazione e grafico della lievitazione a circa 5°C temperatura inferiore a quella ideale

I punti rappresentati nel piano mostrano che essi possono essere approssimati dalla funzione logaritmo naturale $y = lnx$.

$y = lnx$ La funzione logaritmica è utile per descrivere una relazione in cui la variabile dipendente y cresce molto rapidamente all'inizio, per poi stabilizzarsi e crescere sempre più lentamente al crescere della variabile indipendente x.

Nel nostro caso abbiamo osservato che la posizione dei punti nel piano mostra una funzione logaritmica traslata e dilatata rispetto alla funzione elementare $y = lnx$, ossia è una funzione del tipo $y = a\, ln(x - c) + b$, dove:

Il parametro c è la componente orizzontale del vettore di traslazione, se $c < 0$ la curva è traslata verso sinistra, se $c > 0$ la curva è traslata verso destra.

Il parametro b è la componente verticale del vettore di traslazione, se $b > 0$ la curva è traslata verso alto, se $b < 0$ la curva è traslata verso il basso.

Il parametro a è il coefficiente di dilatazione/contrazione verticale, se $|a| > 1$, la curva si allunga verso l'alto (cresce più velocemente); se $0 < |a| < 1$, si comprime. Se a è negativo, la curva viene simmetrizzata rispetto all'asse x.

Per trovare i valori dei parametri a, b, c partendo dai dati reali, abbiamo considerato la prosecuzione del grafico della funzione logaritmica nel secondo e terzo quadrante ed è emerso che essa presenta l'asintoto verticale di equazione $x = -1$.

Il logaritmo non è definito per valori minori o uguali a zero, quindi deve essere:

$x - c > 0 \;\rightarrow\; x > c$ e nel nostro caso abbiamo $x > -1$ di conseguenza $c = -1$.

Se $x = 0 \rightarrow y = a\, ln(x - c) + b \;\rightarrow\; y = a\, ln1 + b \;\rightarrow\; y = b$.

Dai nostri dati osserviamo che al tempo 0 si ha $y = 739{,}2$ pertanto $b = 739{,}2$.

Il vettore di traslazione è $\vec{v}(-1; 739{,}2)$.

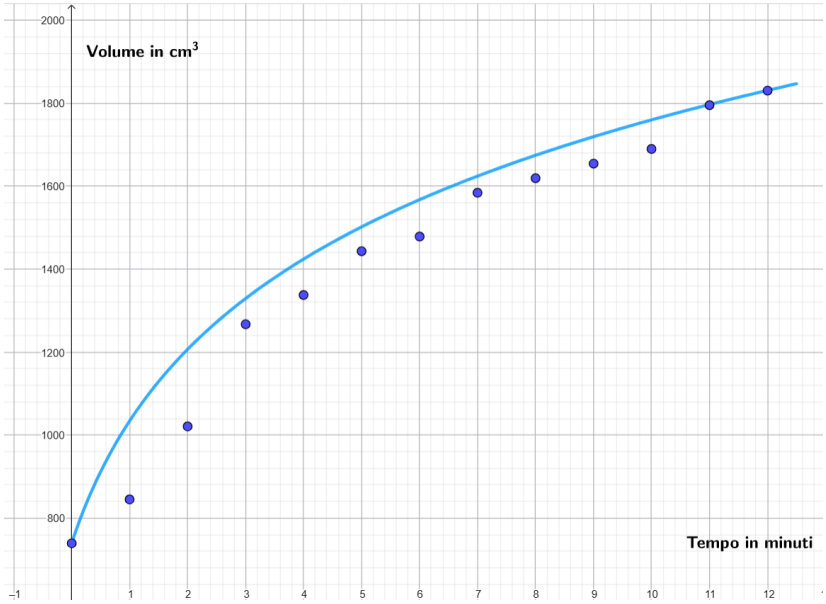
Otteniamo così l'equazione $y = a\; ln\, ln\,(x + 1) + 739{,}2$.

Per determinare il parametro a abbiamo sostituito il punto $(12;\ 1830{,}4)$ nell'equazione $y = a\; ln\, ln\,(x + 1) + 739{,}2$

$1830{,}4 = a\, ln\, ln\,(12 + 1) + 739{,}2 \;\rightarrow\; 1091{,}2 = a\, 2{,}564 \;\rightarrow\; a = 425{,}58 \cong 425{,}6$

$1830{,}4 = a\ ln\ ln\ (12 + 1)\ + 739{,}2 \rightarrow 1091{,}2 = a\ 2{,}564 \rightarrow a = 425{,}58 \cong 425{,}6$Il modello logaritmico è: $y = 425{,}6\ ln\ ln\ (x + 1)\ + 739{,}2 \quad con\ 0 \leq x \leq 12{,}5.$

Funzione logaritmica $y = 425{,}6\ ln\ ln\ (x + 1)\ + 739{,}2 \quad con\ 0 \leq x \leq 12{,}5$



Dal modello matematico e relativo grafico osserviamo che a temperature inferiori a quella ideale, i lieviti riescono comunque a vivere e a conservarsi, continuando ad esplicare la loro azione. Tuttavia, questa risulta più lenta a causa della bassa temperatura, come evidenziato dal grafico che mostra una crescita logaritmica: caratterizzata da un incremento iniziale maggiore per poi procedere lentamente.

Il modello matematico logaritmico mette in evidenza che l'equazione della funzione logaritmo naturale è stata traslata di vettore $\vec{v}(-1; 739{,}2)\vec{v}(-1; 1654{,}5)\vec{v}(-1; 739{,}2)$ e dilatata verticalmente di coefficiente $n = 425{,}6n = 288{,}4n = 425{,}6$.]

5.4 Volume della lievitazione a circa 38°C: Progressione Geometrica

Le coppie ordinate riportate nel piano cartesiano evidenziano che i punti si dispongono secondo un andamento esponenziale. Per essere certi che il

modello esponenziale potesse approssimare i dati, abbiamo riportato in una tabella i tempi riscalati (stadi) e le misure dei volumi e calcolato il rapporto tra il volume allo stadio n ed il volume allo stadio $n-1$. Effettivamente i rapporti ottenuti sono tutti prossimi tra loro, dunque la successione dei volumi rappresenta una progressione geometrica.

Stadio	Volume	Rapporto: V_n/V_{n-1}
0	739,2	0
1	809,6	1,09
2	950,4	1,17
3	1091,2	1,14
4	1302,4	1,19
5	1408	1,08
6	1619,2	1,15
7	1865,6	1,15
8	2358,4	1,26
9	2886,4	1,22
10	3379,2	1,17
11	3836,8	1,13
12	4329,6	1,12

Operando una media di questi rapporti si ottiene 1,16 che rappresenta la ragione della progressione geometrica dei volumi. La relazione ottenuta, per definizione di progressione geometrica, è:

$$V_n = 1{,}16 \cdot V_{n-1} \quad con \quad n = 1,2,3, \ldots \ldots . V_n = 1{,}16 \cdot V_{n-1} \quad con \quad n = 1,2,3, \ldots \ldots \qquad [1]$$

La relazione è valida per qualsiasi valore di $n \geq 1$, per cui $V_{n-1} = 1{,}16 \cdot V_{n-2}$.

Abbiamo sostituito V_{n-1} con $1{,}16 \cdot V_{n-2}$ nella relazione [1] ottenendo:

$$V_n = 1{,}16 \cdot (1{,}16 \cdot V_{n-2}) \quad con \quad n = 1,2,3, \ldots \ldots$$

Continuando in questo modo

$$V_n = 1{,}16 \cdot 1{,}16 \cdot (1{,}16 \cdot V_{n-3}) \quad con \quad n = 1,2,3, \ldots \ldots$$

$$V_n = 1{,}16 \cdot 1{,}16 \cdot 1{,}16 \cdot (1{,}16 \cdot V_{n-4}) = 1{,}16^4 \cdot V_{n-4} \quad con \quad n = 1,2,3, \ldots \ldots$$

siamo giunti alla formula chiusa:

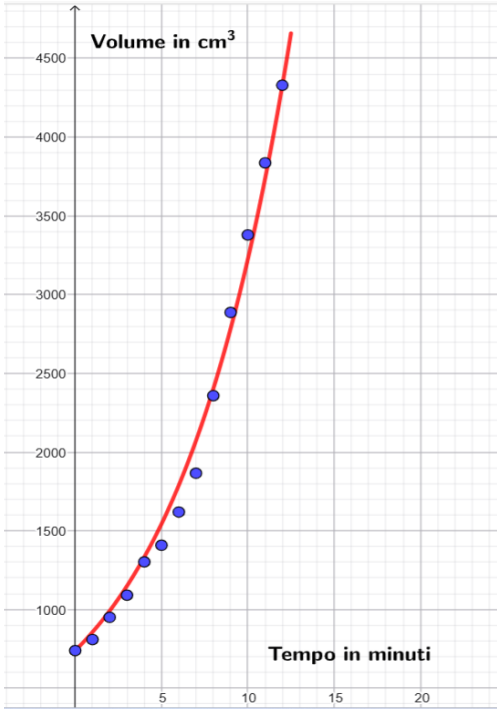
$V_n = V_0 \cdot 1{,}16^n \quad con \quad n = 1,2,3, \ldots \ldots$ con $V_0 = 739{,}2$.]

5.5 Equazione e grafico della lievitazione a temperatura di circa 38°C superiore a quella ideale

Funzione esponenziale

Modello discreto $V_n = 739{,}2 \cdot 1{,}16^n \quad con \quad n = 0,1,2,3, \ldots \ldots ,12$

Modello continuo $V(t) = 739{,}2 \cdot 1{,}16^t \quad con\ 0 \leq t \leq 180\ minuti$



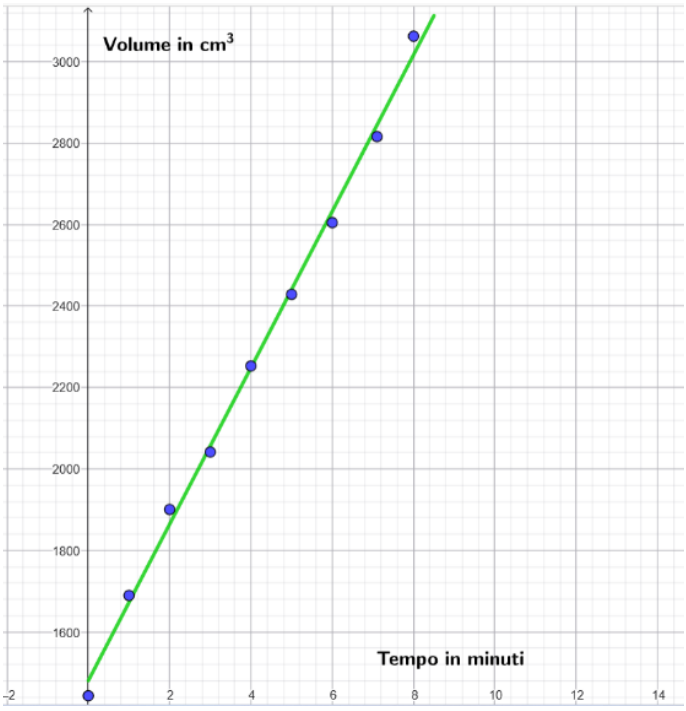
Dal modello matematico e relativo grafico osserviamo che il processo è stato esponenziale in quanto la temperatura maggiore di quella ideale (ma minore della temperatura di 60°C, alla quale i lieviti perdono gran parte della loro vitalità), ha accelerato l'attività dei lieviti. Il processo è avvenuto più rapidamente a parità di tempo.

6. Rimpasto

Dopo 3 ore dal primo impasto, è stato necessario effettuare il rimpasto.

6.1 Equazione e grafico della seconda lievitazione a temperatura ideale

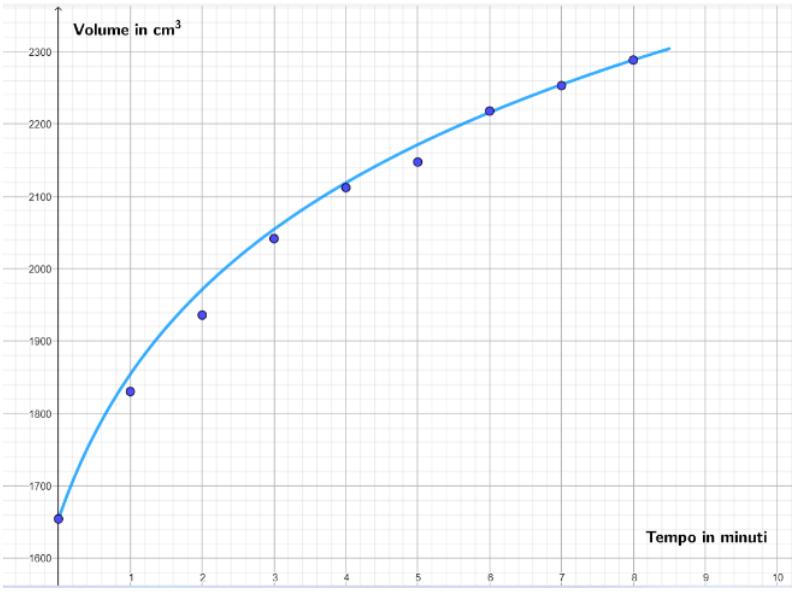
Funzione lineare $y = 192{,}04\,x + 1480{,}74$ *con* $0 \leq x \leq 8{,}5$



Dal modello matematico e relativo grafico osserviamo che a temperatura ideale, il processo di lievitazione dopo il secondo impasto procede in modo analogo a quanto osservato dopo il primo, ossia l'impasto cresce in modo costante, aumentando il proprio volume di 192,04 cm^3 ogni 15 minuti, poiché non subisce variazioni dovute a fattori esterni.

6.2 Equazione e grafico della lievitazione a temperatura inferiore a quella ideale

Funzione logaritmica $y = 288{,}4\ln(x+1)+1654{,}5$ con $0 \leq x \leq 8{,}5$

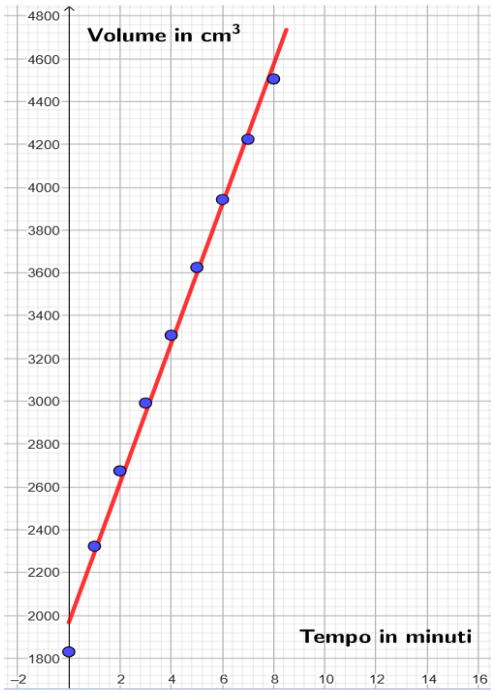


Dal modello matematico e relativo grafico osserviamo che nel secondo impasto a temperatura inferiore a quella ideale, la crescita resta logaritmica, ma i volumi nel tempo sono inferiori rispetto a quelli della prima lievitazione. Ciò avviene perché i lieviti hanno già esplicato la loro azione e, rimanendo a temperatura fredda, la loro attività rallenta.

Il modello matematico logaritmico mette in evidenza che l'equazione della funzione logaritmo naturale è stata traslata di vettore $\vec{v}(-1; 1654{,}5)\vec{v}(-1; 739{,}2)$ e dilatata verticalmente di coefficiente $n = 288{,}4n = 425{,}6$.

6.3 Grafico della lievitazione a temperatura superiore a quella ideale

Funzione lineare $y = 325{,}8\ x + 1966{,}5$ *con* $0 \leq x \leq 8{,}5$



Dal modello matematico e relativo grafico osserviamo che i lieviti continuano la loro attività e la lievitazione avviene in modo costante quindi più lenta rispetto alla lievitazione iniziale (modello esponenziale). Questo perché i lieviti esposti per lungo tempo a temperature elevate rallentano la loro azione. L'aumento costante è di 325,8 cm^3 di volume ogni 15 minuti.

La pigna pasquale del Molise è molto più di un dolce: è un ponte tra passato e presente, un simbolo di rinascita e un momento di condivisione che riunisce le famiglie nella celebrazione più importante dell'anno.

La nostra pigna lievitata a temperatura ideale è la seguente:

7. Conclusioni della ricerca

• Il processo di lievitazione a circa 38°C segue una crescita esponenziale con base 1,16 ed esponente naturale $n \geq 1$ e coefficiente di dilatazione verticale pari a $V_0 = 739{,}2$. Esso è arrivato alla maturazione necessaria in tempi minori, in quanto il calore accelera l'attività dei lieviti. Dopo le due ore e quaranta l'impasto aveva quasi raggiunto il livello massimo del contenitore 3872 cm^3 spingendo per l'apertura del coperchio. Dopo le tre ore il volume dell'impasto di 4329,6 cm^3 era maggiore del volume del contenitore. La lievitazione del secondo impasto ha seguito una crescita lineare, aumentando di 325,8 cm^3 ogni 15 minuti. La lievitazione è risultata più lenta e questo evidenzia che i lieviti non possedevano tutta la loro vitalità.

• Il processo di lievitazione a circa 25°C segue una crescita lineare, aumentando di 195,6 cm^3 ogni 15 minuti. Le condizioni sono ideali per la lievitazione e l'azione dei lieviti è ottimale. La lievitazione del secondo impasto ha seguito una crescita anch'essa lineare, aumentando di 192,04 cm^3 ogni 15 minuti. I tempi giusti hanno consentito all'impasto di sprigionare gli aromi e i profumi propri del lievito madre.

• Il processo di lievitazione a circa 5°C, temperatura di refrigerazione, risulta rallentato. I lieviti riescono comunque a esplicare la propria azione, ma in modo più lento come evidenziato dal grafico che mostra una crescita logaritmica caratterizzata da un incremento iniziale maggiore per poi procedere lentamente. Il modello logaritmico è traslato di $\vec{v}(-1; 739{,}2)$ e dilatato verticalmente con coefficiente di dilatazione $n = 425{,}6$.

• La lievitazione del secondo impasto ha seguito ancora una crescita logaritmica traslata di $\vec{v}(-1; 1654{,}5)$ e dilatata verticalmente con coefficiente di dilatazione $n = 288{,}4$. Notiamo che il coefficiente di dilatazione è minore per il secondo impasto, risultato atteso. Questa condizione è utile per lunghe maturazioni dell'impasto, anche superiori alle ventiquattro ore.

• La corretta gestione della temperatura è quindi fondamentale per controllare tempi, sviluppo e qualità della lievitazione.

Bibliografia

Bergamini, Massimo, Trifone, Anna, Barozzi, Graziella, Manuale Blu 2.0 di Matematica Conf. 4 con Tutor (3 Ed.), Zanichelli, Bologna, 2022.

Brandi, Primo, Salvadori, Anna, Math Training – Media e valori medi – primi modelli lineari – equazioni e disequazioni elementari, Aguaplano, Perugia, 2017.

Brandi, Primo, Salvadori, Anna, I Modelli Matematici entrano a scuola. Vol. B – Proporzionalità e linearità nella vita reale, Grafiche VD srl, Città di Castello (PG), 2015.

Brandi, Primo, Salvadori, Anna, I Modelli Matematici entrano a scuola. Vol. C - Dai modelli lineari ai primi modelli non lineari, Grafiche VD srl, Città di Castello (PG), 2015.

Brandi, Primo, Salvadori, Anna, Math Training - Modelli elementari di crescita/decadimento – fenomeni e modelli periodici, Aguaplano, Perugia, 2018.

Sadava, David, Hillis, David M., Craig Heller, H., Berenbaum, Mary R., La nuova biologia blu Plus, Zanichelli, Bologna, 2021.

Sadava, D., Hillis, D. M., Craig Heller, H., Hacker, Posca, V., Rossi, Rigacci, Chimica organica, biochimica e biotecnologie, Zanichelli, Bologna, 2021.

Posca, V., Fiorani, T., Chimica più. Dalla materia all'elettrochimica, Zanichelli, Bologna, 2022.

Sitografia

https://www.spaghettiemandolino.it/blog/514-pigna-pasquale-ciambella-glassata-dolce
tradizione.html?srsltid=AfmBOorQTmFU_RYAMxLj90ZKTf0GorxHO6u8x0gJ7kMpJ17higrapa2D

TERZA SESSIONE

LA PAGINA LETTERARIA: GIORNATA DEL LIBRO E DELLA LETTURA

Giornata del libro e della lettura in Costiera
Osservatorio Astronomico di Agerola

a cura del Consiglio Direttivo dell'ANFSU "R. Caccioppoli"

*Attività svolta nell'ambito del Progetto "**Dalla narrativa scolastica di Carlo Collodi alle Tecnologie Digitali - L'impegno pedagogico e la responsabilità della Scuola per l'autonomia degli studenti**".*

Introduzione

Nell'ambito del Festival dell'Alta Costiera Amalfitana, il Consiglio Direttivo dell'ANFSU ha organizzato per i giorni 3 e 4 settembre 2026, presso l'Osservatorio Astronomico di Agerola, la *Giornata del libro e della lettura in Costiera*.

L'evento introduce, per i successivi giorni 5-6 settembre, il VI° Convegno *Cultura, Natura e Scienze* che si tiene nell'auditorium del Campus Principe di Napoli adiacente all'Osservatorio Astronomico.

Il *Libro in Costiera* è uno spazio in cui gli autori presentano al pubblico delle loro proposte editoriali, con conseguente confronto e dibattito.

L'integrazione dell'annuale Convegno "Matematica, Natura e Scienze dell'Alta Costiera Amalfitana" - giunto alla VI edizione ed incentrato su discipline di carattere scientifico - con una giornata di Cultura "oltre la matematica e le scienze", è stata una scelta già dallo scorso anno delle associazioni organizzatrici che, per rendere esaustiva una proposta didattica che tenga conto delle esigenze di oggi, ritengono:

- la promozione della lettura nell'insegnamento un aspetto fondamentale da valorizzare in quanto, causa il veloce avanzamento tecnologico e gli stessi dubbi che ci pone un eccessivo utilizzo dell'Intelligenza Artificiale, è sotto gli occhi di tutti un abbassamento delle capacità linguistiche degli studenti.

- la divulgazione di tematiche relative alle interrelazioni tra le varie discipline scientifiche (dalle scienze naturali, biologiche e geologiche alla

fisica, alla matematica ed alla filosofia), in un momento in cui le nuove generazioni dovranno affrontare la difficile sfida ambientale, trarrà sicuramente una maggiore spinta dall'approfondimento della comunicazione linguistica.

La giornata, organizzata con allocazione in tre sale disponibili di postazioni, dove sia gli autori che gli editori hanno potuto esporre le proprie opere, è stata divisa in due sessioni.

La prima sessione, espletata nel pomeriggio di giovedì 3 settembre, è stata introdotta e coordinata dalla prof.ssa Marina Imperato, Dirigente Scolastica distaccata al MIM.

La seconda sessione, svoltasi nel pomeriggio di venerdì 4 settembre, è stata coordinata dalla prof.ssa Giusy Annamaria Cappuccio, docente all'I.C. "Genoino" di Frattamaggiore.

Sono stati presentati quattro libri nella prima sessione e quattro libri nella seconda sessione, di cui indichiamo di seguito le sinossi con brevi profili biografici degli autori.

Sono intervenuti per i saluti istituzionali il dott. Tommaso Naclerio, sindaco di Agerola, la dott.ssa Regina Milo, assessore alla Cultura del comune di Agerola, la dott.ssa Fiorella Zabatta, assessore allo sport, alle politiche giovanili ed alla Protezione civile della regione Campania e la prof.ssa Loredana Biacino, Presidente Mathesis Napoli "Morelli e Rao".

Prima Sessione - Viaggio tra libri, storia e romanzi

Nell'introdurre i lavori, Marina Imperato ha esordito prendendo spunto da una citazione in inglese: *There's something so tactile about books. I like the smell of the pages when you open the cover. Turning the pages and folding down a corner ready for next time* (tr. it.: *I libri sono così piacevoli al tatto. Mi piace l'odore delle pagine quando si apre la copertina. Sfogliare le pagine e piegarne l'angolo per essere pronti alla prossima volta*) che va considerata una vera e propria dichiarazione d'amore nei confronti di un atto (leggere) di cui bisogna appropriarsi e praticare con cura fin dalla più tenera età, per il proprio benessere psicofisico, oltre che per la crescita culturale

individuale. La citazione è tratta dal sito ufficiale 'The Queen's Reading Room', associazione culturale di beneficenza nata per volontà dell'attuale sovrana inglese – grande appassionata di lettura - durante la pandemia come community letteraria su Instagram, che si propone di diffondere la passione per la lettura, celebrata annualmente con un festival. Queen Camilla è attiva in prima persona selezionando i titoli da presentare e arricchendoli con recensioni scritte di suo pugno, ma anche dando impulso ad iniziative collaterali di supporto scientifico al tema della lettura attraverso la commissione di studi di neuroscienze per indagare gli effetti della lettura sul benessere, la salute mentale, la concentrazione e le relazioni sociali.

Questo studio si basa su tre diverse componenti: quantitative, qualitative e neuroscientifiche che hanno fornito oltre 72 milioni di dati e un quadro chiaro delle risposte emotive mentre leggiamo un libro. In estrema sintesi i principali risultati emersi dalla ricerca britannica sono i seguenti:

- leggere per soli 5 minuti al giorno riduce lo stress di quasi il 20%;
- lo stesso periodo di lettura migliora la concentrazione e l'attenzione fino all'11%;
- leggere nelle prime ore del giorno migliora l'umore, aiuta a sentirsi in relazione più positiva con altre persone e migliora la predisposizione ad affrontare gli impegni quotidiani;
- leggere può ridurre significativamente il senso di solitudine;
- la lettura può far diminuire lo sviluppo di forme di demenza, soprattutto in età avanzata;
- una volta raggiunta l'adolescenza, i bambini che hanno iniziato a leggere precocemente presentano una struttura cerebrale, capacità cognitive e risultati scolastici migliori, meno sintomi di malessere mentale e migliore qualità del sonno.

Dunque, i riscontri scientifici appaiono ampiamente positivi in relazione ad aspetti che incidono su svariati fronti: vita personale e di relazione, umore, facoltà mentali (ragionamento, concentrazione, immaginazione, attenzione, creatività, capacità di problem solving, capacità espressive). Sulla base di questi risultati, presentati ufficialmente per la prima volta nel

marzo 2024, la ‘Queen's Reading Room’ nel 2025 ha intrapreso una collaborazione con la *British Neuroscience Association* (BNA) per approfondire ulteriormente la ricerca sull'influenza della lettura sulla salute cerebrale ed emotiva.

Quanto appena esposto in breve si raccorda con un importante anniversario che rappresenta la ragione per cui la lettura deve essere al centro dell’attenzione della società civile e democratica: a partire dal 1996, l’UNESCO promuove annualmente il 23 aprile come la ‘Giornata mondiale del libro e del diritto d'autore’, nota anche come ‘Giornata del libro e delle rose’ (Risoluzione 28 C/Resolution 3.18 del 15 novembre 1995) il cui obiettivo era incoraggiare la scoperta del piacere della lettura e valorizzare il contributo che gli scrittori forniscono al progresso sociale e culturale dell'umanità. Nel 2026 ricorre dunque il trentesimo anniversario di questa iniziativa la cui attualità e concretezza sono cariche di significato e di urgenza planetaria, come avrebbe ricordato Edgar Morin, scomparso a maggio, a cui il mondo della cultura e dell’educazione deve riservare un doveroso e sentito omaggio tenendo sempre ben presenti e vive le sue straordinarie riflessioni.

Quindi, sul finire del XX secolo hanno preso il via iniziative che si concentrano sul ‘leggere’ e, malgrado l’utilizzo sempre più pervasivo delle tecnologie digitali, la lettura è ancora ampiamente considerata come uno strumento efficace e ‘utile’, ma è nel XXI secolo, adesso, che le implicazioni neurologiche sono chiamate in causa in maniera esplicita ed esplorate a tutto tondo.

Tuttavia, è innegabile che esiste un problema con la lettura, con il suo appeal, non soltanto tra i giovani e a scuola, perché questo problema ha radici lontane nel tempo, non imputabili allo sviluppo delle tecnologie o all’uso smodato dei cellulari.

Tuttavia, per diventare lettori bisogna avere/ricercare motivazioni intime che esulino dall’imposizione, come ricordato nell’ormai lontano 1964 dallo scrittore, poeta e pedagogista Gianni Rodari in un articolo della rivista mensile ‘Giornale dei Genitori’. Nel suo intervento Rodari elencava ben

nove errori educativi molto comuni nelle famiglie e nelle scuole e messi in atto proprio dai genitori e dagli insegnanti: nella medesima scia si inserisce lo scrittore francese Daniel Pennac quando ha affermato che 'il verbo leggere non sopporta l'imperativo' (da 'Come un romanzo', 1992). Dando dunque per acquisito che la lettura non è un atto né spontaneo, né naturale dell'essere umano (come ricorda il neuroscienziato francese Michel Desmurget nel suo recente 'Fateli leggere!'), ma che la sua acquisizione dipende da un atto di volontà ben preciso, lo sviluppo di questo atto consiste in una pratica che anch'essa non vive di vita naturale, ma va corroborata, sostenuta con cura, dedizione, in piena libertà e creatività.

I lavori hanno dunque avuto inizio con la presentazione del prof. Mario Rovinello, editore della rivista "Quaderni Caccioppoli", organo ufficiale dell'ANFSU "R. Caccioppoli", di cui gli atti del Convegno in oggetto sono pubblicati come Supplemento del n. 2-agosto/settembre 2026. Il prof. Rovinello ha anticipato la pubblicazione di un libro della nostra socia Caterina Della Vecchia dal "titolo" che segue l'opera "Bastardo napoletano" pubblicato con l'editore nel 2025.

Di seguito la successione delle Presentazioni da parte degli autori:

Maria Antonietta Selvaggio - maselva@libero.it

Ornella Labriola. La solitudine di una memoria irriducibile.

D'Amico editore 2025.

Ornella Labriola (1908-1991) visse tra l'Italia e l'Unione sovietica, dove fu ospite del famoso hotel "lux" di mosca, dimora degli esponenti del comunismo internazionale negli anni dello stalinismo.

Qui si svolse la sua straordinaria storia d'amore con Giuseppe Rimola (1905-1938), dirigente del *KJM* (l'internazionale giovanile comunista), arrestato e condannato a morte come "nemico del popolo" nel vortice del terrore staliniano.

Per il resto della sua vita, Ornella Labriola ha desiderato che venisse fatta luce intorno alla fine del compagno, in modo da restituire a lui l'onore politico e a se stessa il senso della propria esistenza e delle proprie scelte.

L’approccio biografico della ricerca permette di focalizzare sia il rapporto di questa donna con l’ideologia e con il tempo rivoluzionario in cui si era formata sia la relazione d’amore vissuta nel contesto di una cultura in cui veniva considerato naturale e doveroso sacrificare la vita privata sull’altare delle necessità rivoluzionarie.

Maria Antonietta Selvaggio - profilo biografico

Già ricercatrice in sociologia presso il Dipartimento di Scienze umane, filosofiche e della formazione dell’Università degli studi di Salerno e docente di metodologia e tecnica della ricerca sociale presso il corso di laurea magistrale in scienze pedagogiche dello stesso ateneo, è studiosa e saggista in ambito storico e socio-educativo. Ha al suo attivo numerose pubblicazioni. È attualmente vicepresidente della fondazione “thetys-museo del mare di napoli”; fa parte del comitato di redazione della rivista “Bollettino flegreo. Rivista di storia, arte e scienze”. https://mariaantoniettaselvaggio.jimdofree.com

Antonella Salottolo - asalottolo@gmail.com

Bebo l’amico immaginario. Il valore della famiglia e il potere salvifico della creatività e dell'immaginazione infantile**.** Il potere dell'empatia contro l'ombra del bullismo

Gruppo Editoriale Writers Editor, 2026.

Il bullismo e il cyberbullismo non sono semplici "ragazzate" o tappe obbligate della crescita: sono ferite profonde che colpiscono l'anima di chi le subisce, minandone l'autostima, la sicurezza e il senso di appartenenza al mondo. La vittima si ritrova, spesso, avvolta in un mantello di invisibilità e solitudine, faticando a trovare le parole per esprimere il proprio disagio e a chiedere aiuto agli adulti. In un contesto in cui la prevaricazione e l'indifferenza rischiano di diventare la norma, sorge la necessità urgente di fornire ai più giovani strumenti emotivi e narrativi per comprendere, riconoscere e contrastare questo fenomeno.

È proprio in questo spazio vulnerabile che si inserisce il valore terapeutico e pedagogico della narrazione. Le storie hanno il potere unico di dar voce a ciò che fa male, trasformando l'isolamento in condivisione. Attraverso la metafora e la fantasia, i più giovani possono immedesimarsi nei personaggi, comprendere la complessa dinamica tra vittima, bullo e spettatori, e scoprire che la vulnerabilità non è una debolezza, ma il punto di partenza per coltivare una straordinaria forza interiore.

Bebo, l'amico immaginario affronta questa difficile tematica con delicatezza.

Rompendo il confine tra la realtà di Luca - un bambino arguto ma isolato e preso di mira dai compagni - e la magia del regno di Fantastika, la storia dimostra come la risposta alla violenza non sia mai l'ulteriore violenza, bensì l'empatia, l'unione familiare e l'arma rivoluzionaria della gentilezza. L'immaginazione e la creatività non diventano quindi una via di fuga passiva dal dolore, ma il catalizzatore fondamentale per trovare il coraggio di affrontare la realtà a testa alta e cambiarla in meglio.

La storia si sviluppa percorrendo il seguente filone narrativo:

A Fantastika, un regno magico nato dal puro pensiero e sospeso tra le nuvole, vive Bebo, un piccolo "eidico" dalla pelle turchese e gli orecchi a punta. A differenza dei suoi compagni, entusiasti all'idea di viaggiare sulla Terra per legarsi a un piccolo umano, Bebo è timoroso, preferisce la sua routine e si diverte anche da solo. Tutto cambia quando, costretto a letto da una "tosse risolina", comincia a spiare il mondo terrestre attraverso un libro-specchio.

Dall'altra parte del riflesso c'è Luca, un bambino intelligente, creativo e appassionato di dinosauri, che tuttavia a scuola vive un profondo e doloroso isolamento, diventando il bersaglio preferito di un gruppo di bulli. Incapace di restare a guardare di fronte a tanta ingiustizia, Bebo trova il coraggio di attraversare il magico portale per diventare l'amico immaginario di Luca.

Insieme, i due intraprenderanno un cammino di crescita straordinario: Bebo scoprirà le meraviglie della Terra - dal profumo dei libri storici al fascino del mare e della musica live - mentre Luca, supportato dall'affetto

della famiglia e dalla costante presenza del suo amico magico, troverà la forza interiore e la sicurezza necessarie per contrastare le prevaricazioni dei bulli con l'arma più potente di tutte: la gentilezza.

Fino a un'ultima, incredibile avventura: un viaggio per Luca alla scoperta di Fantastika. Al cospetto della Dea del regno, il bambino riceverà una missione cruciale per la sopravvivenza stessa degli eidici: ricordare agli uomini, grandi e piccoli, che l'immaginazione non serve a fuggire dalla realtà, ma a trovare il coraggio di affrontarla e renderla migliore.

Antonella Salottolo - Profilo biografico

Insegna Storia e Filosofia nelle scuole secondarie. Ha tenuto diversi corsi di Filosofia per bambini. Specializzata in marketing e web marketing per aziende, è autrice di diversi romanzi: 'Il fuoco', 'Il vento e l'immaginazione del 2018', 'Evanthia e altre storie del 2023', 'Il giorno zero - Disavventure e riscatti del 2025', che ha ricevuto il premio "Paesi in Lettere" - Zungoli, Premio Nazionale - L'inedito sulle tracce del De Sanctis - XVI edizione, 'Gli elfi in vacanza tra storie e leggende del 2025', oltre a diversi racconti pubblicati in Antologie e Riviste.

Luigi Antonio Coppola - luigi@mail.com

Il moto e la quiete. Un viaggio tra scienza, fede e mistero

Edizione in proprio.

Il romanzo *Il moto e la quiete. Un viaggio tra scienza, fede e mistero* si svolge nel mio piccolo e affascinante paese, Monte di Procida, che si affaccia sul mare dei Campi Flegrei, a 25 km dalla città di Napoli.

Il protagonista è un professore di religione, ironico e profondamente umano, che trasforma ogni lezione in un viaggio tra scienza, fede e mistero. Tra dialoghi filosofici, interrogativi esistenziali, vita quotidiana e le uscite in barca con gli amici, il racconto si apre anche a una vicenda suggestiva e avventurosa, legata all'antico isolotto di San Martino, patrimonio del paese,

e ad un antico segreto che richiama, sullo sfondo, la scomparsa del grande fisico Ettore Majorana.

La narrazione è calata in un intreccio poetico tra mito e realtà, filosofia e quotidianità, con una scrittura che restituisce l'idea della vita come un mare di onde da comprendere prima ancora che attraversare.

Il moto e la quiete è un racconto corale che unisce leggerezza e profondità, dove il sapere si fa esperienza e la domanda centrale diventa: quanto movimento serve per raggiungere la quiete? Una narrazione che scorre come il mare, fatta di onde, ritorni e profondità.

La presentazione si propone come un momento di riflessione condivisa, capace di attraversare discipline e generazioni, invitando i presenti a interrogarsi sul valore della cultura e il rapporto tra conoscenza, interrogativi che essa pone e la vita stessa. Un incontro che restituisca al sapere il suo senso più autentico: quello di comprendere, oltre che attraversare, le onde e il mare della vita.

Luigi Antonio Coppola - Profilo biografico

È Autodidatta, accompagnato dalla passione per la lettura per la maggior parte del percorso di vita, sin da ragazzo. Sposato all'età di 18 anni, si è trasferito negli Stati Uniti, gestendo diverse società per una holding con più di 40 soci. Da oltre un decennio è studente del gruppo internazionale "Wholly Science", sana Scienza e armoniosa Spiritualita', del maestro Johan Oldenkamp, partecipando attivamente alle interpretazioni delle Sacre Scritture, e trattati Ermetici.

Vincenzo Scalzone - vinscalzone1@gmail.com

Le stagioni della pioggia **(**Presentato al Salone di Torino 2026).

Editore Narrazioni Clandestine

La vita di Canius scorre ogni giorno in maniera monotona, in una villa grande, dove lui, oramai anziano, solo e senza memoria, vive assistito dal maggiordomo Franz, che si occupa totalmente del vecchio.

Un giorno la solitudine è stravolta dall'arrivo di una pallonata dal cortile, luogo dove giocano i piccoli Ciccio e Laura, figli di operai della villa; alla mancata restituzione della palla i ragazzini decidono di intraprendere un'azione di recupero della sfera.

In questa impresa incrociano il vecchio Canius, ma allo stesso tempo sono scoperti da Franz, a cui i piccoli, presi dalla curiosità chiedono notizie sul vecchio ospite; da lì inizia una lunga narrazione delle vicende della vita del vecchio, della sua famiglia, dei suoi amici e dei suoi nemici, fino ad arrivare ai giorni attuali e a rivelare il perché della situazione in cui si trova.

Ciò infatti porterà a rivelare diversi aspetti della precedente esistenza di Canius/Oscar, poliziotto felice del suo lavoro e della sua famiglia che conoscerà lo stravolgimento della sua vita per un brutto male improvviso che colpirà la sua piccola figlia Daisy.

Tale situazione lo metterà di fronte a difficili scelte, che lo faranno sprofondare in una situazione peggiore dal punto di vista familiare e professionale, con la conseguenza che sarà lasciato dalla moglie Giovy. Questo porterà alla perdita del lavoro e alla solitudine, che lui combatterà immergendosi nei fumi alcolici e in esperienze criminali al soldo di altri.

Un giorno la sua esperienza sarà richiesta per tentare un'operazione molto difficile: recuperare il piccolo Flavio, stranamente rapito, e sulle cui tracce si metterà il nonno, ricco uomo anziano.

Da lì inizierà una nuova avventura per Oscar/Canius….che stravolgerà nuovamente la sua vita. Infatti, organizzerà un gruppo, una squadra di criminali, pronti a tutto per avere la loro parte, che si metterà sulle tracce (alquanto scarne) del piccolo.

Nel corso della narrazione si susseguiranno peripezie, azione, colpi di scena, con cambi improvvisi di situazione e sullo sfondo la vicenda del piccolo Flavio, vittima di alcuni spietati trafficanti di organi umani, pronti ad operare su di lui un espianto, ma al contempo disponibili ad evitarlo se vi sarà il pagamento di un riscatto.

Emergeranno durante la narrazione i misteriosi ispiratori della scomparsa del piccolo (i suoi genitori), le ragioni sottese, così come sarà fatta luce sul

gruppo di criminali (Il Barone,Geppo, Massimo) che prenderà parte a questa operazione di salvataggio, ognuno, con proprie singole storie che hanno portato la loro vita a deviare verso il crimine.

Il tutto sotto la regia di Oscar, ma poi anche lui subirà il tradimento di alcuni amici (Gerry e Massimo) e sarà rapito, per poi essere ricercato, insieme al piccolo, da alcuni componenti della banda che aveva messo su (a cui si uniranno altri soggetti reclutati a Milano, ovvero Alfio ed Ermete Contini, Faccia d'angelo).

Alla fine, dopo diversi colpi di scena e spargimenti di sangue, si arriverà sia alla liberazione del piccolo, per cui Oscar avrà, oltre alla sua ricompensa economica pattuita, un ulteriore riconoscimento dal Vecchio, nonno del piccolo Flavio, che è stato il committente di questa operazione di recupero. Con un finale che riserverà ulteriori colpi di scena e rivelerà alcuni misteri iniziali della narrazione.

Vincenzo Scalzone - Profilo biografico

Vincenzo Scalzone, nato a Caserta il 21.08.1973, ha vissuto in provincia di Caserta, precisamente a Casal di Principe, mentre ora invece vive ad Aversa; sposato e genitore di tre figli. Laureato in Giurisprudenza nel 1997, ha svolto la professione legale ed ora quella di Giudice onorario presso il Tribunale di Napoli. Sin da ragazzino appassionato alla scrittura, ha evitato da piccolo di scarabocchiare su banchi e muri, prediligendo diari, fogli di quaderno e risme di carta con relativa macchina da scrivere, creandosi l'illusione di essere un giornalista, sogno poi in parte realizzato scrivendo su giornali amatoriali a livello locale. Amante del mare e dei monti, al contempo, di cui preferisce i paesaggi e le atmosfere autunnali, carichi di foglie e di atmosfere malinconiche, ma anche appassionato di viaggi e dello sport (calcio e basket su tutto). Legge noir, ma anche e soprattutto libri di inchieste giornalistiche.

Ha già autopubblicato "Chiavi" (2020) ed in seguito "Autunno dentro" (2021- Ali Ribelli edizioni) Preso dal tempo sospeso (2023- Monnalisa

Edizioni/Pubmed) ed infine "Le Stagioni della Pioggia" (2025- Narrazioni Clandestine/Santelli).

Caterina Della Vecchia - caterinadellavecchia@virgilo.it

Zitella, la popolana che sfidò la vita e anche il re.

Edizione "La Valle del Tempo" 2026

"Zitella, la popolana che sfidò la vita" racconta la parabola di Marianna, detta Zitella, donna nata nei vicoli della Napoli popolare di fine Ottocento e segnata da una bellezza fiera, da un carattere indomabile e da un bisogno assoluto di libertà.

Il soprannome, nato dal suo rifiuto ostinato del matrimonio, diventa il simbolo della sua identità: Marianna non vuole appartenere a nessuno e attraversa guerre, miseria, amori sbagliati, perdite e responsabilità familiari senza rinunciare alla propria forza. Dalla fuga con Biagio alla nascita della sua pizzeria, dall'incontro con Filomena e il piccolo Mariano al matrimonio difficile con Cesareo, la sua vita si intreccia con quella di una Napoli ferita ma vitale, dove la sopravvivenza è un'arte quotidiana.

Le due guerre mondiali, la morte del figlio Papele, le fatiche della maternità, le delusioni familiari e il ritorno a Nusco per ritrovare Mariano compongono il ritratto di una donna contraddittoria e memorabile: generosa e dura, materna e spietata, capace di amare profondamente ma incapace di piegarsi. Una femminista di fine Ottocento, quando le donne venivano allevate in funzione del matrimonio e della procreazione. Lei disse NO. Non mantenne del tutto la promessa fatta a se stessa, ma mantenne intatta la sua libertà di pensiero e il suo carattere indomito.

Zitella sfidò la vita e anche il Re tanto da meritarsi un articolo del Mattino di Napoli intitolato "bella popolana affronta Vittorio Emanuele a tu per tu …".

La sua storia diventa così una saga familiare e popolare sulla libertà femminile, sulla povertà, sulla memoria, sui segreti domestici e sulle ferite che passano da una generazione all'altra.

Zitella resta, fino alla fine, una figura simbolica: una donna che ha scelto la verità anche quando fa male, preferendo la limpidezza della pasta in bianco alle ipocrisie nascoste sotto il ragù della domenica".

Caterina Della Vecchia - Profilo biografico

Nata a Napoli, città dove è sempre vissuta e dalla quale trae spunto e ispirazione per i suoi romanzi sempre ispirati alle esperienze di vita caratteristiche della sua città natale: 'Continente Napoli', 'Ragazze dei vicoli di Napoli' 'Bastardo napoletano' sono le opere prodotte e pubblicate negli ultimi anni. Le sue opere sono state oggetto di articoli e recensioni su eminenti riviste e giornali, sia in Italia che all'estero.

Gli studi sociologici l'hanno condotta ad approfondire e ampliare la sua sfera di interessi soprattutto verso gli aspetti più complessi e contraddittori di una certa società fatta di luci e ombre. Curiosa del mondo che la circonda ha intervistato, ascoltato e osservato molte persone: testimonianze ed esperienze vissute e raccontate che l'autrice ha poi riportato e trascritto nelle pagine dei suoi libri. In possesso di vasta documentazione riguardante aspetti e misteri partenopei ha esplorato ed approfondito anche il tema della "Napoli esoterica" le cui leggende hanno trovato spazio soprattutto nel suo libro Continente Napoli.

Anche l'ultima opera, "Zitella, la popolana che sfidò la vita e anche il re", in fase di assemblaggio per la pubblicazione, descrive fatti di vita reale perché tratto da una storia vera, una saga familiare centrata su una donna del 'Primo Novecento' con la libertà pretesa ai tempi di oggi.

Seconda Sessione - Esperienze culturali, politiche e sociali

Nell'introdurre i lavori della seconda sessione, Giusy Annamaria Cappuccio ha evidenziato l'importanza cruciale del ruolo svolto dall'ANFSU nel promuovere un dialogo fecondo e costante tra il mondo della scuola, della ricerca scientifico-umanistica e le Istituzioni territoriali e nazionali. La cultura e l'educazione non possono infatti prescindere da un'alleanza strategica con chi governa e amministra la cosa pubblica, affinché le istanze sociali e formative trovino concretezza in politiche efficaci e inclusive.

La sessione ha quindi toccato i nodi centrali del dibattito socio-politico ed educativo contemporaneo: dalle strategie di sviluppo e gestione del territorio tracciate nel dossier di Felice Casucci, alle politiche di inclusione sociale e diritto all'abitare affrontate nel volume di Monica Buonanno sul riscatto di Scampia; dai valori pedagogici e dalla memoria etico-familiare custoditi nel lavoro di Antonella Prudente sulla famiglia Palatucci, fino alla fondamentale tutela dell'infanzia e dell'adolescenza richiamata da Paolo Siani con la sua guida all'uso consapevole dei dispositivi digitali. Un percorso corale che riafferma la necessità di un'alleanza concreta tra istituzioni ed educazione per la crescita della comunità.

Di seguito la successione delle Presentazioni da parte degli autori:

Felice Casucci
Presentazione Dossier "VERUM EST FACTUM"

Un'analisi dell'attività istituzionale tra crisi pandemica, ripartenza e sviluppo del turismo regionale. Cinque anni di politiche per il turismo in Campania (2020-2025)

Dossier *Verum est factum* è un documento reperibile in formato digitale sul sito della Fondazione Gerardino Romano ETS di Telese Terme, che si propone come ricognizione, sia pure sommaria, dell'azione politico-istituzionale svolta dal prof. Felice Casucci quale Assessore al Turismo della

Regione Campania (2020-2025), con l'obiettivo di restituire la tracciabilità del dato storico-politico di un'esperienza capace di attraversare e superare con successo gli anni del Covid.

Il Dossier vuole anche essere un momento aperto al confronto e alla riflessione intorno a un'attività di governo della cosa pubblica territoriale tra visione strategica e azione amministrativa, con una particolare attenzione alle aree interne, uno degli assi portanti dell'impegno politico regionale.

Se, con il filosofo napoletano Giambattista Vico, ci è consentito conoscere solo ciò che è frutto dell'opera umana in quanto da noi generata (il *Verum est factum*), occorre risalire agli elementi presenti nella prassi amministrativa regionale per verificarne l'utilità e la continuità.

Il Dossier vuole documentare un lavoro di ampio partenariato, pubblico e privato – attingendo alla rassegna stampa, ai contenuti digitali e agli interventi in Commissione Turismo della Conferenza delle Regioni e in Consiglio Regionale, fino agli spunti curricolari che attestano gli incontri tenuti dall'Assessorato in cinque anni di attività – per misurare concretamente il suo impatto.

La raccolta ha l'obiettivo di riaffermare sul piano politico il "primato del fare" di crociana memoria, in una prospettiva ispirata: ai principi di disciplina e onore della nostra Costituzione (art. 54); a laboriosità e legalità, pensate come un esercizio di democrazia innovativa e matura; ai valori di verità e bellezza, di cui occorre farsi incessantemente, coraggiosamente testimoni e interpreti.

Felice Casucci - Profilo biografico

Già professore ordinario di Diritto Privato Comparato presso l'Università degli Studi del Sannio, dove dal 2001 è stato Direttore del Dipartimento di Studi Giuridici, è stato assessore alla 'Semplificazione amministrativa ed al Turismo' della Regione Campania nel periodo 2020-2025. È Presidente della Fondazione 'Gerardino Romano' di Telese Terme, di cui è stato ideatore e fondatore nel 2002.

Monica Buonanno - monicabuonanno@gmail.com

Siamo Solo Sognatori Abusivi - Scampia ammaina la Vela

De Nigris Editore

L'abbattimento della Vela verde di Scampia: un'avventura concreta e simbolica dentro una politica pubblica integrata.

"Se è vero che anche la memoria è una forma di lotta, è sempre più necessario nella nostra epoca raccontare quanto accade, raccontare affinché non vada perso ciò che di positivo è stato fatto, quali gli errori, quali gli spazi da riempire e da rivedere".

Inizia con queste parole il volume "Scampia" che prende spunto dall'abbattimento della Vela verde di Scampia e che ripercorre la lotta del popolo di quartiere e del Comitato che lo rappresenta.

Una lotta che l'autrice ha avuto l'onore di vivere negli anni più difficili, ma anche più emozionanti, da Amministratrice pubblica e, quindi, anche con una responsabilità che ha dovuto e voluto coniugare con un forte impegno sociale e politico. Il libro accompagna lettrici e lettori nella storia delle Vele e di cosa abbiano significato per il quartiere stesso, per la città e per il Paese e intende fortemente ricordare non solo l'abbattimento della Vela verde, la cui attesa durava da oltre venti anni, ma il suo valore altamente simbolico a valle di una narrazione mediatica che di certo non ha restituito né verità né dignità a Scampia.

L'impegno di scrittura è stato a più livelli e a più dimensioni: sicuramente un racconto per ricordare, per non dimenticare, perché il rischio in situazioni simili è che si dimentichi il percorso, e quindi lo sforzo, politico e amministrativo, per arrivare a cogliere quello specifico obiettivo. Abbattere la Vela verde ha significato un coraggio amministrativo di non poco conto non solo da parte dell'autrice, in quanto Assessore con delega al diritto all'abitare, ma della dirigente e dei funzionari, con specifiche responsabilità. E questo non va dimenticato.

Poi, un racconto per dire che un altro modo di fare politica c'è: direttamente ascoltando e agendo con chi la politica purtroppo

ordinariamente la subisce e non la agisce. Il Comitato Vele di Scampia è stato protagonista insieme all'Amministrazione comunale di Napoli dell'intero processo di rigenerazione sociale e urbana del quartiere, scandendo bene il ritmo delle necessità, definendo congiuntamente i risultati attesi e i tempi. E, ancora, si evidenzia con forza e tenacia il concetto di prossimità e di circolarità dei diritti e delle politiche.

Si dimostra che applicando il concetto di 'circolarità dei diritti' al contesto di rigenerazione sociale e urbana di Scampia ciò che da tempo si approfondisce a livello accademico: le politiche tra loro vanno integrate e non segmentate.

In appendice sono indicati e allegati, con cura, gli atti che l'Amministrazione comunale di Napoli ha dovuto adottare per agevolare il procedimento: dal reperimento delle risorse finanziarie all'abbattimento della vela fino all'assegnazione degli alloggi popolari e all'applicazione della clausola sociale per lavoro vero e dignitoso, affinché Scampia possa diventare un esempio replicabile in altri contesti territoriali, così come Sabina De Luca nella significativa prefazione auspica.
Un racconto popolare, come è stato definito più volte, ma soprattutto un racconto che ci ricorda che siamo sognatori abusivi, tutti noi, in qualsiasi contesto ci troviamo, perché vale sempre la pena "salire sui tetti delle vele di Scampia e vedere il mare

Monica Buonanno - Profilo biografico

Monica Buonanno è nata a Napoli nel 1964. Laureata in Scienze Politiche alla Federico II, ha maturato oltre venticinque anni di esperienza nelle politiche del lavoro e del welfare presso l'agenzia tecnica del Ministero del Lavoro, dove oggi è impegnata in attività per la riduzione dei divari di genere, generazionali e di cittadinanza. Dal 2017 al 2021 è stata Assessore alle Politiche Sociali e al Lavoro del Comune di Napoli, con deleghe che hanno spaziato dal lavoro alla casa, dall'immigrazione alla povertà estrema. In quegli anni ha guidato Restart Scampia, primo programma italiano di politiche integrate casa-lavoro-sviluppo, che ha

portato all'assegnazione di oltre mille alloggi popolari e all'abbattimento della Vela Verde, simbolo di una rigenerazione insieme urbana e umana.

È autrice di diversi libri, tra cui 'Periferie Liquide', 'Ex Taverna del Ferro' e 'Scampia ammaina la vela'. Siamo solo sognatori abusivi, racconto diretto di quella stagione di trasformazione, scritto con lo sguardo di chi le periferie le ha abitate, amministrate e raccontate senza mai smettere di crederci.

Attivista per i diritti sociali e la parità di genere, è Partner di Progetto del Forum Disuguaglianze e Diversità e componente degli Stati Generali delle Donne della Consulta Regionale per la Condizione della Donna in Campania.

Antonella Prudente - antonellaprudente@yahoo.it

La parola e il silenzio dei Palatucci - Educazione cristiana di una famiglia

Edizioni EFESTO 2026

La Presentazione è stata introdotta da Fra Felice Autieri con Lettura di brani a cura dei giovani autori

Un viaggio nella memoria e nella fede attraverso la storia della famiglia Palatucci, emblema di educazione cristiana, cultura e servizio. Al centro la figura luminosa di Suor Celeste Palatucci, donna colta e umile che trasformò la scuola in strumento di libertà e di riscatto sociale. Curato da Antonella Prudente con la collaborazione di giovani autori, il volume intreccia biografia, testimonianze e riflessioni etico-spirituali, mostrando come la parola e il silenzio possano convivere nell'arte dell'educare e del comunicare con amore.

Antonella Prudente - Profilo biografico

Antonella Prudente nasce il 21 gennaio 1971 a Nusco, dove coltiva il suo interesse per la scrittura giornalistica, per le tradizioni e la lingua della sua terra. È Docente di Discipline letterarie al Liceo "Virgilio Marone" di

Avellino. Collaboratrice attiva alla composizione della 'Grammatica del dialetto di Nusco', autrice del primo e del secondo volume di racconti in dialetto nuscano, dal titolo 'Voci, memorie e fatti di Nusco', di una raccolta di proverbi 'ru sai comu si rici?' e, dedicata al primogenito Antonio, del racconto 'Cave Hominem' in cui affronta e denuncia con leggerezza e coraggio una delle piaghe della società di sempre: l'abbandono degli animali.

Numerosi e di rilievo nazionale i Convegni ai quali è intervenuta in qualità di relatrice. Si segnalano esclusivamente i più recenti: Audizione del liceo classico di Nusco, Conferenza sul futuro dell'Europa, 4 maggio 2022 - Stati Generali della Conferenza sul futuro dell'Europa - Roma, Palazzo Brancaccio - 15 giugno 2022.

Nello stesso anno partecipa con il libro dedicato a sua figlia 'Per Manu', IOD editore, alla rassegna per poesia al Settembre culturale di Agropoli e a Sanremo Writers

Docente di lettere, ha portato avanti per sei anni un Progetto, 'Caffe' letterario', cui hanno partecipato alcuni tra i più importanti esponenti della vita culturale del paese e che ha promosso il coinvolgimento diretto dei ragazzi irpini nel dibattito sulla democrazia e sulla necessità di essere cittadini consapevoli e responsabili per affrontare insieme i problemi che riguardano il nostro Pianeta e la comunità umana.

Ha ricevuto il Premio Tulliola con la pubblicazione del testo 'Improvvisi', allievi IV liceo classico 2021-22 e il Premio Nazionale Inedito XV sulle tracce del De Sanctis - Andretta 2022.

Ha collaborato alla realizzazione de 'Invasione poetica', 'Poeti irpini', 'aa.vv, tempra' ed.,2022; alla terza edizione de 'Quaderni salentini', 'Cultura e bellezza d'italia', a cura di Lorenzo Muratore con Enrico Cuccodoro, Antonella Prudente, Maurizia Pierre, Gianluca di Egidio, 2023, ed. Amore di Puglia; ha curato il testo 'parole di legalità', classe II al liceo classico, Nusco - ed. delta 3, 2023. ancora al Settembre Culturale di Agropoli 2025 con la prima edizione di 'Educazione cristiana di una

famiglia' e a Sanremo Writers con la seconda edizione "La parola e il silenzio dei Palatucci. Educazione cristiana di una famiglia".

La sua passione per il gioco degli scacchi, di cui è istruttrice divulgativa, l'ha portata a realizzare manifestazioni ed eventi che hanno visto sport e cultura a confronto. Per due anni ha collaborato e ha scritto su Emme 24, rivista di informazione on line. Oggi collabora e scrive anche su Irpiniattiva.news.

Curatrice del volume di poesia 'Illuminata dalla luna', di Simona Delli Bovi, e del Quarto numero de 'Quaderni salentini', direttore E. Cuccodoro, con le preziose introduzioni del Prof. Giovanni Maria Flick, di Mons. Francesco Savino e della Prof.ssa Silvia Gardini.

Paolo Siani - siani.paolo@gmail.com

Benessere digitale. Guida all'uso consapevole dei Device

Giannini Editore 2026

Nel libro *Benessere digitale* (Giannini Editore), il pediatra Paolo Siani affronta l'impatto pervasivo e incontrollato degli smartphone sullo sviluppo cognitivo, emotivo e relazionale dei minori, proponendo l'adozione di una necessaria "dieta digitale".

L'autore non intende demonizzare la tecnologia, bensì suggerire un approccio equilibrato basato sulle raccomandazioni della Società Italiana di Pediatria e su solide evidenze scientifiche.

La costante distrazione provocata dalle notifiche e il moltiplicarsi delle applicazioni stanno rimodellando la vita quotidiana, riducendo drasticamente gli incontri reali e introducendo l'intelligenza artificiale come un ingannevole surrogato emotivo all'interno di famiglie sempre più fragili e impotenti di fronte a tale dinamica, lesiva per la socialità, l'affettività e la psiche dei più piccoli. La gravità di questa nuova tendenza sociale è confermata anche sul piano legale da una storica sentenza del marzo 2026 in California, che ha condannato Meta e Google per aver progettato app finalizzate a creare intenzionalmente dipendenza nei ragazzi.

Per l’autore la soluzione non può essere delegata ai tribunali o alle leggi, serve una rivoluzione culturale guidata dagli adulti, chiamati a essere modelli credibili.

Attualmente si registra un uso precoce dei dispositivi sin dal primo anno di vita, spesso utilizzati come veri e propri "babysitter elettronici" o calmanti per gestire i capricci.

Questa abitudine altera la regolazione emotiva dei bambini e genera disturbi del sonno o difficoltà attentive. I dati statistici italiani evidenziano inoltre forti disparità socio-economiche, con picchi di abuso nel Sud Italia, e dimostrano come l'utilizzo dei device prima dei sei anni raddoppi il rischio di superare le cinque ore di connessione giornaliera durante la preadolescenza.

Per invertire questa tendenza, il libro traccia percorsi d'azione molto concreti. Viene suggerito di ritardare l'uso dello smartphone personale, limitare rigorosamente il tempo trascorso davanti agli schermi e incentivare attività alternative offline.

La "dieta digitale" si configura così come una vera e propria scelta di cura: un modo per sottrarre tempo ai display e restituirlo all'ascolto, alla presenza e alle relazioni autentiche, costruendo un'indispensabile alleanza educativa tra famiglie, scuole e istituzioni.

Paolo Siani - Profilo biografico

Paolo Siani è pediatra e Primario all’Ospedale Santobono di Napoli. È stato parlamentare e vicepresidente della Commissione bicamerale ‘Infanzia e Adolescenza’. Già presidente dell’Associazione Culturale Pediatri, si occupa da anni di tutela dei minori, salute pubblica ed educazione digitale. Per l’incessante impegno ancora oggi a favore dei minori, ha ricevuto l’onorificenza di Commendatore su delibera del Presidente della Repubblica il 2 giugno 2026, giorno in cui si sono celebrati gli ottant’anni della nascita della Repubblica italiana.

La tutela dell'incanto di un luogo sospeso

Laura Colantonio
Dirigente scolastica del Liceo 'Francesco Sbordone', Napoli
Responsabile Scientifica "Olimpiadi e Acropoli dei Saperi"
lauracolantonio03@gmail.com

Sunto- *Un'antica leggenda lega strettamente il Sentiero degli Dei al mito delle Sirene, cantato nell'Odissea e poi recepito e rielaborato non solo da poeti e scrittori di varie epoche e culture, ma anche nelle produzioni artistiche, musicali e cinematografiche. La fruizione delle arti, come la visione di luoghi incantevoli, costituisce un'esperienza estetica ed emozionale di elevato impatto, anche pedagogico.*

Inoltre, il mito non solo seduce e affascina con la sua bellezza, ma spiega fenomeni naturali, comunica modelli di comportamento ed è spesso anche spiegazione e trasfigurazione di paesaggi. È uno dei meriti della nostra Costituzione l'aver menzionato espressamente, nell'art. 9, il termine "paesaggio". Esso, com'è noto, indica quella parte di territorio il cui aspetto deriva dall'interazione di fattori naturali e umani. È proprio l'intreccio tra una particolare vegetazione, un certo modo di coltivare il terreno, ma anche un patrimonio di miti e tradizioni che fanno parte della memoria collettiva, a porre le basi per una particolare identità paesaggistica da valorizzare e tutelare.

Parole chiave: mitologia, memoria collettiva, identità culturale, valorizzazione del territorio

Abstract- *An ancient legend closely links the Path of the Gods to the myth of the Sirens, sung in the Odyssey and subsequently embraced and reworked not only by poets and writers from various eras and cultures, but also in artistic, musical, and cinematic productions. The enjoyment of the arts, like the vision of enchanting places, constitutes a highly impactful aesthetic and emotional experience, even educational. Furthermore, myth not only seduces and captivates with its beauty, but also explains natural phenomena, communicates behavioral models, and often also explains and transfigures landscapes. One of the merits of our Constitution is its express mention of the term "landscape" in Article 9. As is well known, it refers to that part of the territory whose appearance is the result of the interaction of natural and human factors. It is precisely the intertwining of a particular vegetation, a certain way of cultivating the land, but also a heritage of myths and traditions that are part of the collective memory, that lays the foundation for a particular landscape identity to be enhanced and protected.*

Keywords: mythology, collective memory, cultural identity, territorial valorization

1. Diacronia del mito storico del Sentiero degli Dei

Il Sentiero degli Dei è uno dei percorsi naturalistici più suggestivi della Costiera Amalfitana e rappresenta uno dei luoghi in cui il patrimonio naturale si intreccia in maniera più evidente con la storia, il mito e la letteratura. La sua straordinaria bellezza non dipende soltanto dalla spettacolarità del panorama, caratterizzato da montagne che si affacciano sul mare e da una ricca vegetazione mediterranea, ma anche dal patrimonio di racconti e tradizioni che, nel corso dei secoli, hanno contribuito a costruirne l'identità culturale. Camminare lungo questo sentiero significa quindi compiere un viaggio non solo nello spazio, ma anche nel tempo, attraversando un territorio in cui realtà e immaginazione convivono armoniosamente.

Una delle leggende più affascinanti lega il Sentiero degli Dei al mito delle Sirene, reso immortale dall'Odissea di Omero. Secondo la tradizione, queste creature straordinarie abitavano il tratto di mare compreso tra la Penisola Sorrentina e la Costiera Amalfitana. Dotate di una voce irresistibile, le Sirene attiravano i marinai con il loro canto per poi condurli verso la rovina. Soltanto Ulisse, seguendo il consiglio della maga Circe, riuscì ad ascoltare quel canto senza esserne sopraffatto: si fece legare all'albero della nave mentre i suoi compagni si tapparono le orecchie con la cera, riuscendo così a proseguire il viaggio.

Dal Sentiero degli Dei è possibile ammirare l'arcipelago de Li Galli, conosciuto nell'antichità con il nome di Sirenuse. La tradizione identifica proprio queste isole come la dimora delle Sirene e già il geografo greco Strabone riportava questo antico racconto, contribuendo a consolidare il legame tra il territorio e il mito. Ancora oggi, osservando quel tratto di mare dall'alto del sentiero, è facile comprendere come la straordinaria bellezza del paesaggio abbia alimentato l'immaginazione di generazioni di viaggiatori, poeti e scrittori.

Accanto al mito omerico esiste una seconda leggenda, profondamente radicata nella tradizione locale. Si narra che gli dèi dell'Olimpo avessero percorso questo sentiero per scendere sulla Terra e soccorrere Ulisse, aiutandolo a sfuggire al canto delle Sirene. Da questa narrazione deriverebbe il nome "Sentiero degli Dei", un'espressione che conferisce al luogo un'aura sacra e sottolinea il rapporto privilegiato tra la natura e la dimensione del mito.

Il mito, infatti, non rappresenta soltanto un racconto fantastico, ma costituisce uno dei principali strumenti attraverso cui le civiltà antiche hanno interpretato il mondo. Esso cerca di spiegare fenomeni naturali, trasmette valori e modelli di comportamento, conserva la memoria delle comunità e contribuisce a costruire l'identità culturale dei luoghi. Molti paesaggi italiani devono parte del loro fascino proprio alle leggende che li accompagnano e che continuano ancora oggi a vivere nella memoria collettiva.

Nel corso dei secoli il mito delle Sirene è stato ripreso e reinterpretato da poeti, scrittori, musicisti e artisti appartenenti a epoche e culture diverse. Letteratura, pittura, teatro, cinema e musica hanno trasformato queste figure mitologiche in simboli universali del mistero, della seduzione e dell'eterna attrazione verso l'ignoto. Il mito, quindi, non appartiene esclusivamente al passato, ma continua a dialogare con il presente, assumendo ogni volta nuovi significati.

2. L’eco letteraria delle Sirene

Tra gli autori che hanno saputo cogliere il profondo valore simbolico di questi paesaggi emerge Italo Calvino. Lo scrittore ha spesso riflettuto sul rapporto tra territorio, memoria e immaginazione. Nella sua visione il paesaggio non è mai soltanto uno spazio geografico, ma un luogo nel quale natura, storia e racconto si fondono fino a diventare inscindibili.

Ogni montagna, ogni roccia, ogni tratto di mare conserva le tracce delle civiltà che lo hanno abitato e delle storie che vi sono nate.

Questa prospettiva trova una delle sue espressioni più significative nelle *Lezioni americane*, l'ultima grande opera teorica di Calvino. Tra i valori che lo scrittore propone per la letteratura del nuovo millennio, occupa un posto centrale la leggerezza, intesa non come superficialità, ma come capacità di osservare il mondo da un punto di vista più ampio, senza lasciarsi schiacciare dal peso della realtà. Il Sentiero degli Dei sembra incarnare perfettamente questa idea: situato a oltre seicento metri sul livello del mare, permette di contemplare contemporaneamente montagne, cielo e mare, offrendo una prospettiva privilegiata che invita alla riflessione e alla contemplazione.

Anche l'interesse di Calvino per il patrimonio della tradizione popolare conferma questa sensibilità. Nella raccolta *Fiabe italiane* egli recupera e rielabora racconti provenienti da tutta la penisola, dimostrando come il mito continui a vivere nella cultura contemporanea. Tra queste narrazioni compare anche *La sposa sirena*, la centotrentaduesima fiaba, testimonianza di un immaginario profondamente radicato nelle coste del Mediterraneo, dove la figura della sirena assume il significato di simbolo del mistero, della metamorfosi e dell'incontro tra il mondo umano e quello fantastico.

L'osservazione di un paesaggio come quello del Sentiero degli Dei e la conoscenza delle storie che lo accompagnano costituiscono un'autentica esperienza estetica, culturale ed educativa. La contemplazione della natura, infatti, non suscita soltanto meraviglia, ma favorisce la riflessione, stimola l'immaginazione e rafforza la consapevolezza del valore del patrimonio storico e culturale. Allo stesso modo, il mito continua a educare, poiché permette di comprendere il rapporto profondo tra l'uomo, la natura e il tempo.

Se il paesaggio racconta una storia attraverso la sua conformazione naturale, un ruolo altrettanto importante è svolto dalla musica, che fin dall'antichità accompagna il mito e ne amplifica la forza espressiva. Proprio attraverso il canto delle Sirene, la voce di Orfeo e l'arte delle Muse, il mondo greco mostra come musica e mito siano due linguaggi complementari, capaci di interpretare la realtà e di trasmettere conoscenza. Questo legame,

destinato a rimanere vivo nei secoli, rappresenta uno degli aspetti più affascinanti della cultura classica.

Il rapporto tra musica e mito costituisce uno degli aspetti più significativi della civiltà greca. Fin dalle sue origini, infatti, la musica non fu considerata un semplice intrattenimento, ma un linguaggio capace di mettere in comunicazione l'uomo con il divino, di trasmettere conoscenza e di educare l'animo. Non è un caso che la parola musica derivi dal termine greco *mousiké*, cioè "l'arte delle Muse", le divinità protettrici delle arti, della poesia e del sapere. Già nell'etimologia della parola emerge quindi il profondo legame tra espressione artistica, cultura e spiritualità.

L'intera mitologia greca è attraversata dalla presenza della musica. Apollo, dio della luce, dell'armonia e delle arti, è spesso rappresentato con la lira, simbolo dell'equilibrio e della perfezione; le Muse ispirano poeti e artisti; le Sirene incantano i naviganti attraverso il loro canto; Orfeo riesce a commuovere uomini, animali e perfino le divinità degli Inferi grazie alla forza della sua musica. In tutti questi racconti il canto assume un valore che va oltre la semplice dimensione artistica: diventa una forza capace di influenzare la natura, trasformare l'animo umano e mettere in relazione il mondo terreno con quello divino.

3. Il canto di Parthenope divenuto bellezza

Tra le figure più affascinanti della tradizione mediterranea emerge Partenope, la Sirena che, secondo il mito, dopo il fallimento del tentativo di sedurre Ulisse si lasciò morire tra le onde. Il suo corpo, trasportato dal mare, sarebbe approdato sulle coste dove in seguito sarebbe sorta la città di Napoli, della quale Partenope è ancora oggi uno dei simboli più rappresentativi. La sua figura racchiude molteplici significati: è Sirena, ma anche donna, principessa e creatura divina, simbolo dell'identità culturale di un territorio che continua a riconoscersi nelle proprie radici mitologiche.

Secondo una versione del mito, il canto delle Sirene venne infine sconfitto da quello di Orfeo durante il viaggio degli Argonauti. Mentre le Sirene cercavano di attirare l'equipaggio con la loro voce irresistibile, Orfeo

iniziò a suonare la lira e a cantare con tale armonia da coprirne il richiamo, salvando così i compagni. Il suo canto non conduce alla distruzione, ma alla salvezza; non rappresenta la seduzione ingannevole, bensì la forza ordinatrice della bellezza, dell'arte e della conoscenza. Per questo motivo Orfeo è considerato il mitico padre della poesia lirica e uno dei simboli più alti del potere educativo della musica.

Molti studiosi hanno riflettuto sul rapporto tra mito e musica. Lo storico delle religioni Marius Schneider, nel volume *La musica primitiva*, afferma che "gli dèi sono canti", sottolineando come l'origine del mondo e del sacro possa essere interpretata come una vibrazione sonora, un ritmo primordiale dal quale prende forma la realtà. Anche lo studioso ungherese Károly Kerényi individua profonde corrispondenze tra il linguaggio del mito e quello della musica: entrambi permettono di costruire un ponte tra il mondo interiore e quello esteriore, tra la natura e la cultura, tra la razionalità e l'esperienza emotiva.

Una riflessione analoga è proposta anche dall'antropologo Claude Lévi-Strauss, secondo il quale sia il mito sia la musica possiedono la capacità di oltrepassare i limiti del tempo. Entrambi, infatti, continuano a parlare agli uomini di epoche diverse, conservando intatta la loro forza comunicativa. Attraverso l'ascolto della musica e la conoscenza dei miti l'essere umano entra in contatto con una dimensione universale, nella quale il passato continua a vivere nel presente.

L'importanza educativa della musica era già stata riconosciuta dai filosofi dell'antica Grecia. Pitagora studiò il rapporto tra armonia musicale e proporzioni matematiche, mostrando come l'ordine dell'universo si rifletta anche nelle leggi del suono. Platone, soprattutto nella Repubblica, attribuisce invece alla musica un ruolo fondamentale nella formazione morale dell'individuo, poiché essa contribuisce a educare il carattere, sviluppare il senso della bellezza e orientare l'uomo verso il bene. Secondo il filosofo, chi riceve una solida educazione musicale è maggiormente capace di riconoscere l'armonia nelle opere d'arte, nella natura e nella vita stessa.

4. Il patrimonio estetico del paesaggio degli Dei

La fruizione delle arti e la contemplazione di luoghi come il Sentiero degli Dei rappresentano quindi un'esperienza estetica, emotiva e pedagogica di straordinaria importanza. La bellezza del paesaggio, la memoria dei miti, la forza evocativa della musica e la ricchezza della letteratura concorrono insieme a costruire una più profonda consapevolezza del patrimonio culturale. Attraverso queste esperienze l'uomo sviluppa sensibilità, spirito critico e senso di appartenenza alla propria storia.

Questa concezione trova un importante riconoscimento anche nella Costituzione italiana. L'articolo 9 afferma infatti il dovere della Repubblica di promuovere lo sviluppo della cultura, della ricerca scientifica e tecnica e di tutelare il paesaggio e il patrimonio storico e artistico della Nazione.

Il paesaggio non è soltanto un insieme di elementi naturali, ma il risultato dell'interazione continua tra ambiente e attività umana. Il Sentiero degli Dei rappresenta perfettamente questa sintesi tra natura e cultura. Le sue montagne, il panorama sul mare, il ricordo delle Sirene, il viaggio di Ulisse, il canto di Orfeo, la figura di Partenope, le riflessioni di Italo Calvino e la musica che continua ancora oggi a raccontare questi luoghi dimostrano come il paesaggio non sia mai soltanto uno spazio fisico, ma una memoria vivente. Conservare e valorizzare questo patrimonio significa custodire non solo la bellezza della Costiera Amalfitana, ma anche quell'insieme di miti, racconti, opere artistiche e tradizioni che costituiscono una parte fondamentale dell'identità culturale del Mediterraneo e dell'Italia. Il Sentiero degli Dei continua così a essere un luogo in cui il passato dialoga con il presente, invitando ogni visitatore a riscoprire il profondo legame tra uomo, natura, arte e memoria.

Ringraziamenti

I miei ringraziamenti, personali e istituzionali, al professore Ferdinando Casolaro per la preziosa opportunità di partecipare al convegno “Cultura, Natura e Scienze dell’Alta Costiera Amalfitana”.

Bibliografia

Odissea, trad. Rosa Calzecchi Onesti, Einaudi
Geographikà, libro V (Italia meridionale) di Strabone
Lezioni americane, Italo Calvino, Mondadori, 1998
Perché leggere i classici, Italo Calvino, Mondadori 1991
Fiabe italiane, Italo Calvino, Mondadori, 1995
Gli dèi e gli eroi della Grecia, Kàroly Kerényi, il Saggiatore, 2015
Antropologia strutturale, Claude Lévi-Strauss, il Saggiatore, 2015
La zattera della bellezza, Marco Dallari, Il Margine, 2021
Il sapere mitico, Maurizio Bettini, Einaudi, 2021
Articoli da *Parthenope, incanto e metamorfosi perché il suono diventi bellezza,* Laura Colantonio, Rogiosi Editore, 2022:
I Dialoghi di ogni dove: dal mito all'"economia del vivere" (2021)
La musica del mito nel suono che diviene bellezza (2022)

Sitografia

Treccani.it (per approfondimenti su Omero, Platone, Orfeo, Sirene e Partenope)
Fondazione Nicola Piovani: nicolapiovani.it
Sentiero degli Dei: organizzazione.cai.it
www.parcodeimontilattari.it
Articolo 9 della costituzione italiana: senato.it
Paesaggio e memoria culturale: docenti.unina.it Paesaggio e letteratura.pdf

La dignità della parola nell'era dell'Intelligenza Artificiale

Antonella Prudente
Liceo Virgilio Marone (Av)
antonellaprudente@yahoo.it

Sunto- *L'avvento dell'Intelligenza Artificiale rappresenta una delle trasformazioni più profonde della storia contemporanea. Quale posto occupa oggi la parola umana? Il presente lavoro è un invito alla riflessione e al tentativo di trovare possibili risposte per vivere il futuro in continuità armonica con il passato, attraverso il diverso e nuovo rapporto tra linguaggio, cultura e tecnologia*.

Parole chiavi: stupore identità significato modernità

Abstract- *The advent of Artificial Intelligence represents one of the most profound transformations in contemporary history. What place does the human word occupy today? This work invites reflection and attempts to find possible answers to live the future in harmonious continuity with the past, through the different and new relationship between language, culture, and technology*.

Keywords: astonishment identity meaning modernity

1. La responsabilità della parola nell'era digitale

Per la prima volta, strumenti tecnologici sofisticati sono in grado di produrre testi, dialogare con gli esseri umani, tradurre lingue, sintetizzare conoscenze e persino generare contenuti che appaiono creativi. Di fronte a questa rivoluzione emerge una domanda cruciale: quale posto occupa oggi la parola umana?

A ben vedere, il rapporto tra l'uomo e l'artificiale è già più intimo di quanto siamo disposti ad ammettere. Basta pensare a un gesto apparentemente banale: aprire il frigorifero alle due e quarantacinque di notte e accorgersi che è vuoto perché, travolti dalla frenesia quotidiana, abbiamo dimenticato di fare la spesa. Dietro quel frigorifero, dietro la logistica che lo rifornisce, dietro gli algoritmi che organizzano consumi e

distribuzione, c'è già l'Intelligenza Artificiale. Essa vive accanto a noi da tempo, silenziosa e discreta, tanto presente da risultare quasi invisibile. Quando pronunciamo una frase come «Alexa, accendi la luce», siamo convinti di impartire un ordine a uno strumento che obbedisce. In realtà stiamo interagendo con una tecnologia che interpreta il linguaggio umano, lo traduce in comandi e restituisce una risposta. L'IA è entrata nelle nostre case e nelle nostre vite molto prima che iniziassimo a interrogarci sulla sua presenza.

In questo scenario prende forma l'idea di un nuovo umanesimo della parola. Se l'Umanesimo rinascimentale pose al centro l'uomo come essere razionale e creatore di cultura, oggi siamo chiamati a ridefinire il ruolo della persona in un mondo in cui la produzione linguistica non è più una prerogativa esclusivamente umana. Non si tratta di opporsi alla tecnologia o di difendere nostalgicamente il passato, ma di comprendere che cosa renda veramente umana la parola.

È una domanda che affonda le proprie radici nella tradizione filosofica. Gli antichi avevano già immaginato automi e forme di intelligenza non umana, ma soprattutto avevano compreso che ogni autentico percorso di n

conoscenza nasce da una condizione fondamentale: lo stupore. Derivata dal latino *stupor*, questa parola indica una meraviglia così intensa da sospendere per un istante l'azione e il giudizio. Platone, nel *Teeteto*, individua nella meraviglia l'origine del filosofare; Aristotele, nella *Metafisica*, afferma che gli uomini iniziarono a cercare la conoscenza proprio perché stupiti dai fenomeni che non riuscivano a spiegare. Prima delle risposte vennero le domande.

Quando Senofane di Colofone osservava che gli Etiopi immaginavano dèi simili a Etiopi e i Traci dèi simili a Traci, compiva un gesto rivoluzionario: metteva in discussione ciò che appariva ovvio. La filosofia nasce proprio da questa capacità di interrogare criticamente la realtà. Oggi, nell'epoca dell'Intelligenza Artificiale, siamo chiamati a compiere un'operazione analoga. Che cos'è l'intelligenza? Che cosa distingue la comprensione dal semplice calcolo? Che cos'è la creatività? Quale rapporto

esiste tra conoscenza e coscienza? Le macchine non risolvono questi interrogativi; al contrario, li rendono ancora più urgenti.

Nella mia esperienza di insegnamento ho voluto trasformare tali domande in un percorso educativo. Nella libertà che la scuola ancora consente, ho costruito un itinerario che attraversasse la storia della letteratura italiana seguendo un filo conduttore inedito: la parola, dal Trecento all'Intelligenza Artificiale. Le studentesse del percorso di Scienze Umane hanno accolto questa proposta con entusiasmo, imparando a utilizzare l'IA come strumento di ricerca e occasione di confronto. Accanto a noi hanno camminato studiosi, artisti e professionisti accomunati dall'amore per la parola: il musicista e scrittore Michele Pecora, il dantista Rino Caputo, il Data Protection Officer Massimo Montanile, il parlamentare e scrittore Paolo Siani e la professoressa Marianna Esposito Vinzi. Insieme abbiamo cercato di promuovere una cultura dell'innovazione didattica e della valorizzazione del patrimonio culturale, convinti che le competenze linguistiche, critiche e argomentative siano oggi più necessarie che mai.

La vera sfida consiste infatti nell'educare alla parola. Viviamo in un tempo in cui disponiamo di una quantità pressoché infinita di informazioni, ma rischiamo di perdere il senso profondo del linguaggio. Eppure la parola umana non è una semplice sequenza di segni. Essa nasce dall'esperienza, dalle emozioni, dalle relazioni e dalla memoria. Quando una persona racconta una sofferenza, una gioia o una speranza, non trasmette soltanto dati: comunica una parte di sé. La parola implica intenzionalità e responsabilità; può ferire o guarire, escludere o accogliere, distruggere o costruire. Per questo possiede una densità esistenziale che nessun algoritmo può realmente vivere.

2. La parola come esperienza umana e la ricerca del significato

La letteratura offre esempi straordinari di questa ricchezza. In Dante la parola è identità, visione del mondo e ricerca della verità; nella *Divina Commedia* ogni termine contribuisce a edificare una complessa architettura morale e spirituale. In Petrarca essa diventa specchio dell'interiorità e luogo

di una continua ricerca di sé. In Boccaccio si apre alla concretezza della vita quotidiana, alle passioni, alle fragilità e alle virtù degli uomini. Attraverso questi autori comprendiamo che il linguaggio non è soltanto uno strumento di comunicazione, ma il luogo in cui l'essere umano prende coscienza di sé e del proprio destino.

Tra il XV e il XVI secolo l'Umanesimo valorizzò la dignità della persona attraverso lo studio delle lettere, della filosofia, della storia e della retorica. Oggi la società digitale sembra riproporre, in forme nuove, la stessa questione antropologica. Gli algoritmi sono capaci di elaborare enormi quantità di dati e trasformarli in linguaggio; scrivono articoli, compongono poesie, rispondono a domande e partecipano a conversazioni sempre più complesse. Tuttavia, proprio questa capacità impone una riflessione più profonda.

Per una macchina il linguaggio è una struttura da elaborare, una rete di correlazioni statistiche, una complessa architettura di dati. L'IA può imitare il linguaggio umano con risultati sorprendenti, ma non possiede l'esperienza da cui quel linguaggio nasce. Non conosce la nostalgia di Petrarca, il viaggio spirituale di Dante o la vitalità narrativa di Boccaccio. Può descriverli e analizzarli, ma non viverli. La differenza fondamentale non risiede dunque nella produzione delle parole, bensì nell'esperienza che conferisce loro significato.

Paradossalmente, proprio la crescita dell'Intelligenza Artificiale contribuisce a illuminare aspetti fondamentali della natura umana. Quando una macchina produce una poesia o sviluppa un ragionamento complesso, siamo costretti a chiederci che cosa significhi davvero comprendere, creare, immaginare. L'IA diventa così uno specchio che riflette la nostra intelligenza e ci obbliga a definire con maggiore precisione ciò che rende unica l'esperienza umana.

Questa riflessione conduce inevitabilmente a una questione ancora più radicale: quale sia il fine ultimo dell'uomo. Le grandi tradizioni filosofiche, da Aristotele a san Tommaso d'Aquino, hanno identificato nella felicità il movente fondamentale dell'agire umano. Ricchezza, potere e successo

possono apparire come mete sufficienti, ma si rivelano limitate quando vengono assolutizzate. L'essere umano continua a desiderare qualcosa di più grande: una verità e un bene capaci di rispondere alla profondità della sua natura razionale e spirituale. L'Intelligenza Artificiale può aiutarci a organizzare informazioni, velocizzare processi e risolvere problemi, ma non può sostituirsi alla ricerca del significato ultimo dell'esistenza.

In un celebre passaggio del romanzo *Sempre tornare*, Daniele Mencarelli scrive: «Dentro ogni colore acceso, a ogni battito di ciglia che rinnova lo stupore, io sento qualcosa, come un nome che chiede di essere trovato e pronunciato. Dentro la bellezza ci abita qualcuno». Queste parole suggeriscono che la realtà non si esaurisce nella sua superficie visibile. Lo stupore invita ad andare oltre l'apparenza e a cercare la profondità delle cose. È lo stesso atteggiamento che spinse i filosofi greci a interrogarsi sull'origine del mondo e che oggi ci spinge a riflettere sul significato dell'Intelligenza Artificiale.

Per questo il nuovo umanesimo della parola deve essere anzitutto un progetto culturale ed educativo. Deve insegnarci a porre domande prima ancora che a cercare risposte, a utilizzare gli strumenti digitali senza diventarne dipendenti, a coltivare il pensiero critico e il senso di responsabilità. Le nuove generazioni devono imparare a interpretare i testi, verificare le fonti, riconoscere la disinformazione e sviluppare capacità argomentative solide. In questo contesto le discipline umanistiche assumono una rinnovata centralità: filosofia, letteratura, storia e linguistica non rappresentano un'eredità del passato destinata a scomparire, ma strumenti indispensabili per comprendere criticamente il presente e orientarsi nel futuro. Ogni innovazione tecnologica amplifica le possibilità dell'agire umano. L'Intelligenza Artificiale può favorire l'accesso alla conoscenza, sostenere la ricerca scientifica e migliorare i processi educativi; allo stesso tempo può essere utilizzata per diffondere disinformazione, manipolare l'opinione pubblica e creare nuove forme di disuguaglianza. Il problema fondamentale non risiede nella tecnologia in sé, ma nell'uso che gli esseri umani decidono di farne. Per questa ragione la questione centrale non è se

le macchine diventeranno sempre più intelligenti, ma se noi sapremo utilizzare tale intelligenza in modo responsabile e orientato al bene comune.

La differenza più profonda tra comunicazione umana e generazione automatica del linguaggio risiede nella dimensione relazionale. Quando due persone dialogano non si limitano a scambiare informazioni: condividono emozioni, costruiscono fiducia, interpretano contesti e si riconoscono reciprocamente come soggetti dotati di dignità. La parola autentica è sempre un incontro. Essa crea legami, genera appartenenza e rende possibile la vita sociale. L'Intelligenza Artificiale può facilitare la comunicazione e ampliare l'accesso alla conoscenza, ma non può sostituire integralmente questa esperienza.

L'Intelligenza Artificiale non segna la fine dell'umanesimo; al contrario, ne rende necessaria una nuova formulazione. Quanto più le macchine diventano capaci di generare parole, tanto più emerge il bisogno di comprendere ciò che rende umana la parola stessa. Il nuovo umanesimo della parola pone al centro la dignità della persona, la libertà di pensiero, la creatività, il senso critico, la responsabilità morale e il dialogo. Non contrappone uomo e tecnologia, ma promuove una collaborazione nella quale gli strumenti digitali siano al servizio dello sviluppo umano. La sfida del nostro tempo consiste nel coniugare innovazione e saggezza, progresso tecnico e consapevolezza etica. Solo così l'Intelligenza Artificiale potrà diventare non un fattore di impoverimento culturale, ma un'opportunità per riscoprire la ricchezza della parola come espressione della nostra comune umanità.

Bibliografia

R. Filippelli (2004) *L'eredità letteraria Storia e testi della Letteratura italiana*, Simone.

UNESCO, *Recommendation on the Ethics of Artificial Intelligence*, https://www.unesco.org.

D. Mencarelli (2001) *Sempre tornare*, Mondadori.

Armaghedòn
Monologo in 9 scene

Antonio Martone
Dipartimento di Studi Politici e Sociali Università di Salerno

Scena 1 -- Prologo

Tono: *Cupo, sospeso, come un risveglio dopo un incubo*

Non so da dove vengo.
So soltanto che non riesco a morire.
Il vuoto di una stanza si può chiudere a chiave.
Il vuoto dei secoli no.

(Cambio di ritmo: più secco.)

L'ho scoperto per gradi, come si scopre una malattia -
prima il sospetto, poi la certezza, poi la rassegnazione.
Gli altri morivano intorno a me. Io no.
Ogni volta che credevo fosse l'ultima,
mi ritrovavo da qualche altra parte,
con lo stesso senso di non appartenere a nessun posto preciso.
L’immortalità porta con sé troppa grandezza, troppa luce.
La mia è una realtà grigia e più ostinata:
è semplicemente l'incapacità di andarmene.

(Pausa. L'attore guarda le proprie mani.)

Fui trovato nel più profondo di un massiccio montuoso.
Mi allevarono come un animale utile - cibo, tanto lavoro, e soprattutto disciplina.
Quando divenni grande, scappai.
Non avevo niente. Non ero niente.
Avevo capito, però, una cosa che poi si è rivelata il mio unico vantaggio:
chi non è visto può vedere tutto.

Dedicai così la mia esistenza a guardare
gli uomini illuminati dalla scena pubblica,
quelli che lasciano tracce nei libri e nei monumenti -
in fondo, quelli per cui altri uomini muoiono.

(Più intimo.)

Non ho mai smesso di pensare d'essere figlio di Re.
Forse è l'unica forma di dignità che un paria come me possa permettersi:
la certezza vaga di meritare qualcosa di diverso
da quello che gli è stato dato.
O forse
è soltanto una storia che mi racconto per andare avanti.

(Pausa lunga. Poi, quasi stanco.)

Ho smesso di contare gli anni.
Ho smesso di contare le guerre.
Quello che non ho mai smesso di fare è guardare -
e portare con me una ferita che non si chiude mai del tutto.

(Si sistema. Più diretto verso il pubblico.)

Questa è la mia memoria. Non tutta - sarebbe insopportabile.
Quello che vi racconterò è soltanto ciò che non riesco a trattenere.
Quel poco che riesco a dire.

Scena 2 -- Troia

(Epico e dolente, con improvvisi squarci di tenerezza)

Per sopravvivere, un paria come me, senza alcun grado o dignità sociale,
entrò a far parte delle truppe d’erano addestrati giovani guerrieri.
Seguii dunque il Re Ulisse.
Varcai l'Egeo per andare a seminare morte sotto le mura di Troia.
Dovevo farlo - ma non avevo mai avuto sete di sangue,
e uccidere non mi piaceva.

(Amaro.)

Ero l'ultimo dei soldati greci.
Per tutti, fui sempre nient'altro che un corpo con una lancia in mano,
al servizio di un Re -
carne da mattatoio,
condannata ad arrossarsi di sangue
a maggiore gloria di coloro che, come cani rabbiosi, ci portavano al massacro.
Accadde che un giorno i capi litigarono fra loro.
Un compagno d'armi, che veniva da Sparta,
seppe che Achille,
la cui partecipazione al conflitto costituiva la nostra speranza di vittoria più grande,
aveva litigato per alcune storie di donne con Agamennone.
Appresi che Achille si era ritirato dalla guerra -
e che Ettore aveva approfittato della sua assenza
per uccidere il suo amante Patroclo.
Ora Patroclo era morto.
E Achille, per vendicarlo, aveva deciso di ritornare a combattere.

(La voce si alza appena, incantata.)

Fu allora che finalmente lo vidi.
Achille era solo col suo carro
e s'aggirava armato di tutto punto attorno alle mura di Troia.
Non riuscivo a distogliere lo sguardo dall'immagine della Medusa disegnata a caratteri d'oro su quell'enorme scudo.

(Più teso.)

A un tratto, vidi Ettore erto sulle mura di Troia.
Attorno a lui, i sudditi di Priamo -
guerrieri, donne, bambini, vecchi -
trepidavano per la sorte del loro condottiero.
Accanto a Ettore c'era Andromaca, sua moglie,
e Astianatte, il figlio piccolo.
Ettore era rivestito della sua armatura -
e sapeva bene che stava per affrontare in un duello fatale,

lui mortale,
il nostro Achille, che tutti sapevano invincibile.

(La voce si fa improvvisamente tenera, quasi incredula.)

Lo vidi mentre baciava la moglie piangente -
e poi provava a prendere in braccio il bambino.
Il piccolo, però, spaventato dall'elmo equino del padre,
non lo riconobbe e scoppiò a piangere.
Ettore, allora, pose l'elmo a terra,
prese il bambino
e lo strinse al petto con un lunghissimo, tenerissimo abbraccio.

(Pausa. La voce si abbassa.)

Mi chiesi se avrei mai avuto qualcuno per cui valesse la pena togliere l'elmo.
Qualcuno che non vedesse in me soltanto un corpo con una lancia in mano.
La risposta, allora, fu silenzio.
Un silenzio che non ha mai smesso d’essere sé stesso.
Non vidi più Ettore fino a quando
non si presentò al cospetto del suo nemico
che lo aspettava inferocito.
Quando scorsi la lancia di Achille fendere l'aria
per andare a conficcarsi nella gola del duce troiano -
cercando di non farmi vedere dai miei compagni d'armi -
piansi.
Non smisi di piangere fino a quando,
soltanto qualche giorno dopo,
una lancia troiana penetrò profondamente nel mio costato.

(Pausa. La voce si fa lontana.)

Abbandonai allora le pianure di Troia,
lasciando i due eserciti al loro destino.
Da allora, però, non riesco a smettere di rivederli -
Ettore e Achille, con i loro pennacchi colorati,
davanti alle Porte Scee,

scagliarsi addosso le lance.
Li scorgo ancora. Vedo Ettore cadere pesantemente nella polvere -
e osservo impotente Achille che lo lega al suo cocchio
per trascinarlo intorno alle mura.

(Pausa. Riflessivo.)

Soltanto molto dopo, un sopravvissuto mi raccontò
che il Re Priamo era andato con un carro pieno d'oro
a chiedere il corpo del figlio morto.
Il vecchio Re aveva addirittura baciato la mano
che aveva scagliato il dardo fatale nella gola del figlio prediletto.
Il crudele assassino e il vecchio Re
avevano pianto insieme sulle vicende degli uomini.
Che cosa sono gli esseri umani?
Dadi lanciati dalla cieca volontà degli Dei.
Condannati a uccidere o essere uccisi,
nel rapido volgere di un tempo troppo breve.

Scena 3 -- Spartacus

Tono: *Duro, secco, con improvvisa dolcezza nei ricordi*

Chi non riesce a morire è destinato a ricominciare.
Sono passati anni, o secoli - ho smesso di contarli.
Ero diventato uno schiavo barbaro caduto in mani romane.

(La voce è ferita, quasi fisica.)

Sulla Via Appia, il viandante poteva ammirare il macabro spettacolo
di un'interminabile processione di croci.
Su una di quelle, c'ero anch'io.
Laceri e seminudi, morenti o già morti,
migliaia di uomini bagnavano di sangue
i margini della strada più famosa del tempo.
Non eravamo assassini o criminali -
ma poveri schiavi come me che avevano osato opporsi alla legge di Roma.
Fra noi, c'erano anche dei gladiatori.

Come loro, anch'io ero stato nutrito e addestrato
per dare la morte o subirla
al suono delle risate sguaiate dei romani.
Avevo combattuto accanto a loro, mangiato con loro,
dormito nella stessa stanza che odorava di cuoio sudato e di olio.
Uomini che hanno imparato a dormire con le armi in mano
e a riconoscersi dall'odore.

(Più caldo, quasi affettuoso.)

Ricordo una sera in cui Crixo rise così forte
da far cadere il vino dal boccale di Enomao.
Ricordo Casto che parlava di libertà
come se fosse un posto preciso dove andare.
Lo lasciavamo parlare.

(Pausa. La voce cambia - diventa più grave, quasi riverente.)

E poi c'era Spartaco.
Non saprei come descrivere il nostro capo a chi non lo ha visto.
Non era semplicemente un uomo grosso e forte.
Aveva in sé qualcosa che i romani non erano mai riusciti a spezzare.
Quando parlava, ragionava ad alta voce -
lo seguivamo convinti che stesse pensando insieme a noi.
Era raro che qualcuno ci trattasse come esseri umani.
Lui lo faceva

(L'attore si siede a terra, come sui gradini di pietra.)

Una notte, poco prima che esplodesse la rivolta,
lo trovai sveglio nell'arena vuota.
La luna era alta e l’ombra tagliava la sabbia in strisce bianche e nere.
Spartaco era seduto sui gradini di pietra,
le mani appoggiate sulle ginocchia,
lo sguardo fisso davanti a sé.
Non guardava il punto dove i combattimenti si svolgevano -
ma più in alto, verso le gradinate deserte,
i seggi vuoti dei senatori,

il palco da cui il lanista annunciava i numeri del giorno dopo.
Dopo un lungo silenzio, disse:
"*Sai qual è la cosa più difficile?*
Non è morire nell'arena. Quello è facile.
La cosa difficile è immaginare il dopo.
Immaginare un posto dove non ci siano gradinate,
dove nessuno ti guarda con scherno o con odio."
Poi si alzò e se ne andò senza aspettare risposta.

(L'attore si rialza lentamente.)

Non lo rividi fino alla battaglia finale.
In mezzo al sangue e alla polvere, mentre i nostri si disperdevano,
lo scorsi per l'ultima volta .
in piedi su un mucchio di corpi,
con la spada insanguinata nelle mani.
Era circondato. Non gridava. Non chiamava nessuno.
Quando lo persi di vista, stava ancora combattendo.

(Tornano la durezza e il dolore fisico.)

Ora, sulla croce, assistevo alla decomposizione lenta della mia carne
beccheggiata da uccelli rapaci.
I nostri condottieri non erano fra gli uomini crocifissi:
ad eccezione di Spartaco -
il cui corpo, non più riconoscibile,
non fu mai più ritrovato -
gli altri erano tutti morti in precedenza, con le armi in pugno.
Crixo era caduto per primo.

(Pausa. Amaro, quasi un sorriso.)

Non era l'ingiustizia che mi tormentava - anche quella la conoscevo bene -
ma il fatto che il nostro sacrificio avesse lasciato tutto immutato.
Anzi: proprio quella potenza che volevamo abbattere,
Roma,
grazie alla vittoria su di noi,
era diventata ancora più forte.

(Pausa. Poi, come una sentenza.)

Che cos'è l'umanità?
Gli sterminatori di uomini vengono celebrati.
E le vittime, prima o poi, dimenticate.

Scena 4 -- Lepanto

Tono: *Visionario, febbrile, con momenti di lucidità glaciale*

Dopo di allora, il mondo ha continuato a girare,
portando con sé altri Dei, altre lingue, altri stendardi.
Gli esseri umani mutano gli usi e le visioni del mondo -
Ma l'odio rimane.
Ora non vestivano più come Ettore e Achille
ed erano molto diversi anche dai legionari romani.
Avevano inventato nuovi strumenti per uccidere.
Le lance, gli scudi e gli elmi mi sembravano ormai cose da bambini.

(Più incalzante.)

Fu così che quel giorno mi ritrovai a Lepanto.
Ricordo quattro ore terribili
in cui gli uomini divennero insetti intrappolati in una bottiglia infuocata
che lentamente cola a picco negli abissi.
C’era stato detto che dovevamo dare tutto:
che la sorte della cristianità dipendeva da noi,
che Dio stesso ci proteggeva.
Io ero un soldato sulla galea di Don Giovanni d'Austria.
Era il capo supremo - un giovane con quella qualità tipica di chi è destinato alla gloria.
Vista da vicino, però, lo avevo imparato da Achille
quella gloria assomiglia molto alla certezza di morire presto.

(L'attore guarda in alto, come se vedesse stendardi.)

Quando le due formazioni navali si avvicinarono,
vennero innalzati gli stendardi di battaglia.
Sulla galea del condottiero ottomano,

issarono un simbolo di cotone bianco proveniente dalla Mecca,
su cui il nome del loro Dio era ricamato a lettere dorate migliaia di volte.
Sulla *Real* issarono invece lo stendardo di damasco celeste della Lega cristiana,
con il Cristo crocifisso e gli stemmi del re di Spagna, del Papa e di Venezia.
In hoc signo vinces.
Dio contro Dio, ciascuno nella propria lingua.
Guardavo i due stendardi e pensavo:
se entrambi pregano lo stesso cielo
e lo stesso cielo li lascia ammazzare,
allora forse il cielo non è uno solo -
o forse è uno solo ma è lacerato dentro.
Non era un pensiero da teologo, lo so.
Era il pensiero di un soldato che sta per morire
e cerca di capire per conto di chi.
Non trovai alcuna risposta.

(La voce cresce, diventa quasi urlata, poi si spezza.)

Tutte le galee erano adornate a festa,
bandiere di ogni sorta,
come se ci si stesse avvicinando a una grande cerimonia nuziale.
Era una festa quella, sì,
ma lo sposalizio era con la morte.
Accecate dal fumo dei cannoni,
le galee cozzarono finalmente le une contro le altre
cercando nel corpo dei nemici quella verità che soltanto la battaglia può dare.

(Rallenta, con orrore.)

Si scatenò una tempesta di archibugiate e di dardi di ogni tipo
a cui si aggiunse il diluvio del fuoco greco.
Il fuoco roteava nell'aria:
palle arroventate che, come stelle incandescenti,
trasportavano nella loro corsa, incendiandoli,
i corpi che incontravano.

Alcuni li vedevo prendere fuoco,
urlare fino a quando avevano fiato in gola.
Continuavano a bruciare fin dentro l'acqua,
dove cadevano e presto affondavano.
Intorno a noi, il tanfo e il fumo acre di tutto ciò che bruciava:
gli uomini ardevano come candele viventi.
I cappellani gesuiti per ungere i corpi bruciati usavano il burro.

(Pausa. La voce si fa piccola, distaccata.)

Morii proprio così: arso in un angolo della galea.
Per alcuni istanti fui un groviglio di fuoco e di cenere.
Mi dimenavo impazzito per il dolore
quando fui calpestato da un mio commilitone.

(Pausa. Poi riprende, più lento.)

Non riuscii a vedere la nostra vittoria che giunse al crepuscolo.
Mi fu raccontato soltanto dopo
che le fiamme avevano consumato lentamente i relitti delle navi ottomane.
La superficie del mare era disseminata di turbanti, giubbe, armi e tamburi.
I corpi che ancora galleggiavano, illuminati dal legno incendiato,
facevano da triste contraltare ai remi, alle tavole, alle casse disperse.

(Amaro.)

Non tutti i nostri nemici erano senza vita.
Molti erano soltanto feriti -
provavano a nuotare arrossando l'acqua di sangue,
cercando qualcosa a cui aggrapparsi.
Pur essendo fatti, come noi, a immagine e somiglianza di Dio,
i miei commilitoni raramente li tiravano su -
e, se lo facevano, era per procurarsi qualche schiavo in più.
Nella maggior parte dei casi, i feriti nell’acqua erano bersagli per gli archibugi.

(Pausa. Quasi sussurrato.)

Soltanto col calare del buio,
le navi cristiane ammaccate,
colme di uomini a cui mancavano braccia e gambe,
si diedero da fare per rientrare festanti nei porti.
Dio aveva vinto. Il nostro Dio. L'altro aveva perso.
Io ero rimasto lì, cenere sul fondo del mare,
a chiedermi se ci fosse qualche differenza
quando i corpi dei vinti e dei vincitori
finiscono a marcire nella stessa acqua.

Scena 5 -- Parigi

Tono: *Freddo, nervoso, con crepe di rimorso improvviso*

Non avevo mai creduto a niente.
Poi arrivò la Rivoluzione - e per la prima volta - la prima - ci cascai.
Ero entrato in servizio da un avvocato della Convenzione.
Si chiamava *Renaud*.
Era un tipo frugale, preciso, silenzioso: adatto allo spirito del tempo.
Il mio compito era aprire la porta, servire a tavola e sparire.
Nelle strade, succedeva qualcosa che non avevo mai visto in tremila anni:
gli uomini discutevano su che cosa valesse davvero.
Su chi avesse il diritto di contare.
Sentivo che quei discorsi mi riguardavano.
Ero sempre stato un corpo senza nome, un numero sul bavero.
La Rivoluzione diceva che anch'io contavo.
Diceva *liberté, égalité, fraternité*
e per un momento m'illusi non fosse la solita bugia.

(Il tono si fa più teso, quasi da thriller.)

Una sera *Renaud* ricevette tre uomini.
Li feci entrare io.
Un tipografo con le dita perennemente nere d'inchiostro.
Un ex sergente che camminava come se il terreno non fosse mai abbastanza piatto.
Un medico di quartiere con le mani sempre sporche.

Si sedettero in cucina.
Portai il vino, sistemai i bicchieri, rimasi nell'ombra della porta.
Parlavano di liste. Di nomi.
Chi aveva esitato al momento del voto sul Re?
Chi frequentava ancora i preti?
Chi aveva parenti emigrati?
Renaud ascoltava e prendeva appunti con una piccola matita -
lo stesso gesto preciso, la stessa calma chirurgica
con cui a tavola tagliava la carne.
Riconobbi alcuni nomi.
Uno era il droghiere della strada parallela alla nostra -
un uomo basso e silenzioso che mi aveva venduto del tabacco
qualche settimana prima.
Poi c'era una donna, moglie di qualcuno che era scappato.
Un altro ancora era il calzolaio di *Place du Carrousel*.
Strinsi forte il vassoio.

(Pausa. La voce si fa gelida.)

Quando se ne andarono, rimasi a sparecchiare in silenzio.
Renaud era ancora seduto col foglio davanti,
rileggeva quello che aveva scritto con la piccola matita.
Alzò gli occhi e mi guardò.
Perché sapevo. Era evidente che sapevo.
"Hai sentito?" chiese.
Il mio silenzio era una risposta.
"Va bene così" disse.
La matita era già scesa sul foglio prima che finisse di parlare.

(La voce si incrina.)

Quella notte non dormii.
Fissavo il soffitto della mia stanza -
un soffitto basso, scrostato,
con una macchia d'umidità che aveva la forma vaga di un continente.
Pensavo ai nomi su quel foglio.
Sapevo dove abitavano, conoscevo le loro facce.
Sapevo che cosa stavano diventando -

una data, un numero di protocollo,
una testa che cade in un cesto di vimini.
Avrei potuto alzarmi.
Uscire nel buio.
Bussare a una porta.
Dire: scappa, hai ancora questa notte.
Una sola parola detta nel momento giusto.
Rimasi nel letto.

(Pausa lunga. Amara.)

Mi raccontai le solite storie.
Che ero un servo.
Che nessuno mi avrebbe creduto.
Che non era affar mio,
che il mondo andava così,
che non potevo fermarlo da solo.
Le stesse storie di sempre -
ma quella notte non reggevano.
In tremila anni, i caduti li avevo portati con me come una ferita.
Per la prima volta, avevo saputo con certezza il nome di chi avrei potuto salvare.
Non avevo fatto niente.
Avevo compilato anch'io una lista.
La mia lista era fatta di silenzi.

(Più cupo.)

Nei giorni seguenti i nomi sparirono uno ad uno.
Il droghiere fu il primo -
lo vidi passare su un carro, con le mani legate davanti.
Poi la donna. Seppi soltanto dopo.
Il calzolaio di *Place du Carrousel* resistette più a lungo.
Per qualche tempo, continuò a parlare agli angoli delle strade.
Poi anche lui sparì.
Renaud continuò le riunioni in cucina.
Continuò a maneggiare la piccola matita.
Io continuai ad aprire la porta, a servire il vino e a sparire nell'ombra.

Una sera, mentre sparecchiavo,
trovai sul tavolo il foglio che *Renaud* aveva dimenticato.
Era coperto di nomi -
alcuni cancellati con un tratto netto, altri ancora intatti.
Li lessi tutti.
Poi rimisi il foglio dove l'avevo trovato
e andai a lavarmi le mani.
L'acqua nella catinella diventò grigia.
La cambiai.
Diventò grigia di nuovo.
La cambiai ancora.

(Pausa. Vuoto.)

Quando anche *Renaud* finì sulla ghigliottina, non provai niente.
Uscii dalla casa di *Renaud* con le stesse mani con cui ero entrato.
Le stesse mani che avevano portato il vassoio, aperto e richiuso la porta.
Fuori, la gente cantava.
Qualcuno credeva ancora.
La Rivoluzione non era finita - stava solo cambiando forma.
Liberté, égalité, fraternité.
Le parole erano ancora lì, scritte sui muri, grigie di pioggia.
Il calzolaio non le avrebbe più sentite.

Scena 6 -- Waterloo

Tono: *Nudo, grottesco, quasi documentaristico*

Pensai che fosse finita. Finalmente! Invece no.
Risorsi, come dopo Troia, come dopo le croci della Via Appia.
Ora, mi districo a fatica dai corpi accatastati,
abbandonati dalla vita.
Osservo l'orizzonte e capisco di trovarmi in una situazione orrenda:
completamente nudo,
ho addosso, soltanto per metà, la giacca di una divisa.
Uno straccione che mi credeva morto stava cercando di spogliarmi
completamente -
gli rimaneva da togliere soltanto la giubba.

Tirava con forza mentre spingeva il suo scarpone fangoso sul mio corpo.
Era stato proprio il peso sgarbato del suo piede lercio a farmi riprendere i sensi.
Riuscii ad alzarmi a fatica.
Nel mio corpo avevo un proiettile.
Mi aveva provocato una brutta emorragia.
Il braccio destro era totalmente fuori uso.

(Pausa. Quasi ironico.)

Fu allora che vidi una smorfia di disappunto sul volto dell'uomo che cercava di spogliarmi.
Sperò fino all'ultimo che non ce la facessi a rimettermi in piedi.
Quando si rese conto che, dopotutto, ce la facevo,
fece finta di niente e se ne andò bofonchiando,
portandosi via le cose che m'aveva già rubato.

(La voce si fa più analitica.)

Fra il bosco che scorgevo in lontananza e le colline disseminate di cadaveri c'era una distesa di corpi nudi -
evidentemente avevano avuto tempo di spogliarli.
Vidi poi sopraggiungere ancora della gente:
uomini con delle pinze rugginose in mano
che spalancavano le bocche dei morti alla ricerca di denti.
Si accanivano sugli ufficiali,
poiché nella bocca di questi era più probabile trovare denti d'oro.
Quando non ne trovavano, si accontentavano anche dei denti normali -
li avrebbero poi venduti ai costruttori di dentiere.
Ora ricordo: sì, stavamo combattendo ed ero caduto.
La battaglia a quanto pare era finita.
Sì, ero a *Mont-Saint-Jean*, a sud del villaggio di *Waterloo*.
Avevamo dormito male la notte precedente,
distesi all'aperto sul terreno acquitrinoso
mentre la pioggia continuava a cadere sulle nostre teste.
La mattina eravamo tutti eccitati:
dopo aver sconfitto i prussiani,
dovevamo finalmente annientare anche *les anglais*.

(Tornano la durezza e l'orrore.)

Nel boschetto, cercai un po’ di riposo.
Da lontano, vedevo che i contadini del posto ripulivano il campo.
Gli anglo-prussiani venivano inumati, i francesi arsi.
Le pire bruciarono per più di una settimana -
gli ultimi giorni alimentate soltanto dal grasso dei corpi,
perché il legno era finito.
Sentivo l'odore nel sonno.
Poi anche le ossa -
quelle degli uomini e quelle dei cavalli, indistinguibili alla fine -
furono raccolte, caricate e spedite nello *Yorkshire*.
Le macinarono.
Le trasformarono in concime.

(Pausa. Amaro.)

Quando lo seppi, pensai che era giusto.
Le ossa dei ragazzi morti ritornavano a casa per concimare i campi dei loro padri.
C'è una logica economica stringente in tutto questo.
Dopo qualche giorno, cercai di allontanarmi dal boschetto.
Ero troppo debole per farcela.
Il mio corpo decide che era abbastanza.
Caddi. Dormii.
Il mondo continuava a macinare tempo.
Quando riaprii gli occhi, non riconobbi più niente.

Scena 7 -- *Verdun*

Tono: *Sordo, oppressivo, quasi ipnotico*

Mi svegliai senza ricordare neppure di essermi addormentato.
Fu un risveglio lento
come quando si risale da un sonno troppo profondo.
Sentii prima un odore che non riconoscevo,
fatto di terra bagnata, di sudore vecchio,

di qualcosa di metallico e dolciastro.
Poi il tatto:
qualcosa di freddo e molliccio sotto la guancia,
un peso umido che mi avvolgeva.
Aprii gli occhi.
Non vidi niente, all'inizio.
Poi lentamente il buio si popolò:
una parete di terra davanti al mio viso,
un intreccio di radici che spuntavano dal basso soffitto
e un'ombra accanto a me che, dopo qualche secondo, riconobbi essere un uomo.
Dormiva. O forse era morto.
In quel buio, la differenza era sottile.
Ero in uno spazio angusto, un corridoio scavato nella terra,
con le pareti di fango che stillavano umidità.
Intorno a me, altri corpi -
uomini accovacciati, sdraiati, accasciati contro la parete.
Alcuni respiravano. Altri no.
La memoria tornò a scatti, come schegge che riaffiorano.
La battaglia. La pioggia. Il fango. Poi il buio.
Mi trascinai verso l'uscita -
una scaletta di legno che saliva verso una luce grigia.
Ogni gradino era un piccolo sforzo,
le mani affondavano nel fango per tirarmi su.
Quando finalmente uscii, la luce mi ferì gli occhi.
Era un cielo basso, color piombo,
tagliato a strisce da qualcosa che non riconobbi subito -
filo spinato, chilometri di filo spinato
che si stendevano all'infinito.
Sotto, il fango.
Fango dappertutto - fino alle caviglie, fino alle ginocchia,
un fango grigio, denso, che sembrava non volermi lasciare andare.
Non c'erano alberi, né case, né strade.
C'erano soltanto crateri, buche scavate dalle bombe,
e in lontananza un'altra linea di terra rialzata.
Una trincea nemica.

(Pausa. L'attore guarda le sue mani.)

Guardai le mie mani.
Erano nere di terra e di qualcos'altro che non volevo identificare.
Le unghie spezzate, le nocche sbucciate.
Le aprii e le chiusi, come per accertarmi che funzionassero ancora.
Sì. Funzionavano. Come sempre.
Un soldato era seduto con la schiena appoggiata alla parete di fango.
Teneva tra le mani una fotografia sbiadita -
una donna con un bambino in braccio.
Accanto a lui, un altro uomo puliva un fucile
con una calma irreale.
Mi fermai.
Indossavo una divisa che non ricordavo di aver messo.
Grigioverde. Macchiata di terra e di sangue secco.
Sul bavero, avevo un numero. Sì, un numero.
E capii.
Non eravamo più uomini che si affrontano ma numeri che si consumano.
Non più soldati ma carne da spendere.
E io - io che avevo attraversato i secoli portando con me i morti come una ferita -
mi trovavo di nuovo in mezzo a loro.
Questa volta non c'era Achille, né Ettore.
Non c'era nessuno che potessi guardare negli occhi prima di ucciderlo.
C'era soltanto fango.
E il rumore sordo dei cannoni - che non finiva mai.
Il mattino dopo, l'uomo accanto a me non c'era più.

(*Riflessivo*)

Sopravvissi a *Verdun* com'ero sopravvissuto a tutto il resto -
per quell'ostinata incapacità di morire.
Qualcosa in me, però, aveva ceduto,
come una costola che non torna mai più al suo posto.
Nelle altre guerre, il male aveva sempre un volto e uno stendardo.
Qui era diventato un sistema freddo collocato dappertutto e da nessuna parte.

E un sistema non si può odiare e non ci si può contrapporre a lui.
Puoi soltanto scomparire nel fango insieme agli altri.
Quando finì - e finì, come finisce tutto -
ero rimasto troppo svuotato per gioire.
Mai come allora, però, il mio conflitto si accese.
Questa volta però contro me stesso.
Sapevo che non avrei combattuto mai più.

Scena 8 -- La fine della guerra / Il portiere

(*Stanco, dimesso, con improvvisi lampi di lucidità*)

È ovvio che chi combatte contro sé stesso
non ha la forza di fare le guerre.
Fui scartato.
Pare ci fosse anche un'altra ragione:
i bene informati dicevano che non c'era più bisogno di guerrieri,
poiché la guerra si faceva ormai con armi che potevano essere gestite da pochi,
efficientissimi soldati.
Mi arresi al loro giudizio ma non lo condividevo.
Dalla mia esperienza della guerra ho imparato bene una cosa:
soltanto gli uomini che conoscono la morte conoscono la vita.
Quelli che, invece, non l'hanno guardata in faccia
possono calcolare tutto - traiettorie, probabilità, danni collaterali -
ma non sanno quello che fanno.
Per un lungo periodo non feci niente.
Dormivo dove c'era un tetto, mangiavo se qualcuno me lo consentiva,
non rispondevo a domande sulla mia vita.
Cercai allora un posto silenzioso,
dove la gente passasse senza fermarsi.
Mi fu offerto un posto da portiere in un albergo dove si andava a fare sesso.
Il mio lavoro era semplice:
stavo dietro un bancone di formica,
consegnavo chiavi, annotavo orari e non facevo domande.
La notte era la parte più intensa.
Saliva gente di ogni tipo -

coppie giovani che si tenevano per mano,
uomini soli con la cravatta allentata,
donne che ridevano troppo forte.
Passavano davanti a me come se non ci fossi -
e in un certo senso era vero.

(Più intimo.)

Una notte, verso le tre, scese una coppia che aveva litigato.
Lui aveva la mascella stretta e lei guardava il muro.
Si fermarono un attimo nell'atrio prima di uscire.
Lui allungò una mano verso il suo braccio -
un gesto piccolo, quasi involontario -
e lei lo lasciò fare.
Si toccarono soltanto un secondo.
Poi risero e uscirono nel buio abbracciati
Mi resi conto che stavo osservando quella scena
con la stessa attenzione con cui un tempo
osservavo i movimenti del nemico prima di una carica -
cercando il punto debole, la traiettoria, il momento in cui si decide tutto.
Era evidentemente una deformazione professionale.
La coppia era già sparita da qualche minuto
ma io ero rimasto a guardare la porta.
Mi chiedevo che cosa avessi visto esattamente.
Due corpi si riconoscevano senza distruggersi.
Mi sembrava una cosa straordinaria e quasi innaturale.
In tremila anni avevo visto corpi stringersi per mille ragioni -
la paura, l'abitudine, il freddo, la disperazione -
ma mai per quella ragione lì.

(Pausa. Riflessivo.)

Capisco Giobbe meglio di qualunque teologo:
il problema non è l'esistenza del male,
ma il silenzio di Dio di fronte ad esso.
Quel silenzio è già una risposta.
E la risposta è intollerabile.

Per la prima volta, quella notte mi chiesi
se non fosse possibile darne un'altra lettura.
Se non fosse possibile guardare due corpi che si sfiorano
e vedervi non il punto debole
ma piuttosto una superficie su cui appoggiarsi.
Chi mi aveva scartato aveva capito assai bene:
non soltanto non ero più adatto alla guerra,
ma non avevo più a che fare neppure con le illusioni della vita.

Scena 9 -- Il fungo e Har Megiddo

(*Filosofico, accusatorio, infine disperatamente lucido*)

Nelle notti in portineria, non potevo far altro che leggere.
Fu così che capii meglio che cosa volessero dire i miei superiori
quando dicevano che le nuove armi non avevano bisogno di soldati.
Appresi che il colonnello Paul Tibbets, un giorno,
s'era diretto verso una città giapponese.
Il suo velivolo si chiamava *Enola Gay* -
il nome della madre del comandante.
Giunto sulla città, aveva sganciato una bomba
Trecentocinquantamila persone morirono subito.
Lessi. E poi rilessi.
E non riuscii a capire.
Non perché il numero fosse enorme - numeri simili li avevo già incontrati -
ma perché era incomprensibile la distanza dal massacro.
Achille aveva la lancia in pugno mentre mirava alla gola di Ettore.
Tibbets non vide niente.
È questo, indubbiamente, il vantaggio del progresso.
Gli abitanti di quella città
si ritrovarono all'improvviso in una gigantesca nuvola infuocata.
In città era tutto distrutto.
Tibbets eseguì gli ordini e rientrò alla base.
Negli anni successivi dichiarò di non provare rimorso.
Aveva fatto il suo lavoro.
E quando arrivò il momento di pensare alla propria morte,
volle che le proprie ceneri fossero disperse -
nessuna lapide, nessun posto preciso

dove la storia potesse fermarsi a fare i conti con lui.
Come la sua bomba, in fondo:
anche quella non aveva lasciato niente a cui appoggiarsi.
Solo assenza, dove prima c'erano trecentocinquantamila persone.

(Pausa. L'attore cambia tono.)

Lessi tutto questo nella mia stanza d'albergo -
quella in cui dormivo quando non ero in portineria.
Era una stanza piccola, con una finestra che dava su un cortile interno.
Un ragazzo lavorava con me:
faceva i turni di mattina,
ogni tanto veniva prima e aspettava che smontassi seduto nell'atrio.
Aveva diciannove anni forse, o venti.
Mi chiese se avessi mai visto una guerra.
Non rispondo mai a questa domanda.
Quella notte però ero stanco e la stanchezza abbassa le difese.
Gli risposi di sì.
Lui aspettava.
Allora gli narrai qualcosa di Lepanto - non tutto, soltanto le immagini:
gli stendardi, il fuoco che roteava, gli uomini che bruciavano nell'acqua.
Cercai di raccontarlo così come lo avevo vissuto -
come terrore e orrore,
come una realtà dalla quale non ci si riprende mai più.
Mentre parlavo, lo guardavo negli occhi.
Fu lì che vidi la cosa sbagliata.
Sul suo volto non c'era paura.
Vidi i suoi occhi illuminarsi -
come quando una fiamma trova finalmente il suo combustibile.
Stava immaginando di esserci.
Lo stava addirittura desiderando.
Non il massacro - non era un mostro, quel ragazzo -
ma la grandezza, la vicinanza alla morte,
quella sensazione di stare dentro ciò che conta davvero.
Ciò che avevo raccontato come un inferno,
lui lo stava desiderando.
Smisi di parlare a metà di una frase.
Lui aspettò ancora un momento,

poi capì che non avrei continuato
e annuì come quando si è ricevuto qualcosa di prezioso.
Mi alzai, lo salutai e uscii nella nebbiolina dell'alba.
Il racconto aveva svolto il suo compito perverso,
come tutte le cose che una volta dette non ci appartengono più.

(Pausa. La voce si fa più cupa, quasi un'accusa verso sé stesso)

Chi spinge gli uomini a desiderare il male?
Chi ha fatto in modo che possano essergli complici?
Io stesso non ho mai cercato di fermare una guerra.
Neppure una. In tremila anni.
Ho pianto Ettore, sono bruciato a Lepanto e annegato nel fango di *Verdun*.
Ho portato con me i morti come si porta una ferita.
Però, non ho mai messo il mio corpo di traverso.
Non mi sono mai alzato per dire: questa no! Non questa!
Mi dissi che era perché ero un paria, uno senza nome, né grado:
chi mi avrebbe ascoltato?
Sapevo però che era una bugia.
La verità era più meschina.
Io sono un animale gregario.
E l'animale gregario non ha coraggio.
Gli costa più opporsi che andare a morire.
Si distrae: una macchia sul soffitto, una scarpa slacciata,
e già il momento è passato.
Chi sono io per oppormi quando tanti hanno deciso diversamente?
Mi dico che la mia voce non conta. Meglio non fare niente.
La verità è che tutti abbiamo delle possibilità,
anche quelli che non contano niente.
Una parola detta nel momento giusto può piegare una cosa in una direzione diversa.
Ho sempre lasciato passare quei momenti.
A Parigi m'ero alzato dal letto nel buio,
avevo aperto la porta del corridoio,
avevo visto davanti a me la strada che portava dal droghiere, dalla donna, dal calzolaio -
e avevo fatto un passo indietro.
Li avevo guardati morire con la stessa attenzione con cui osservo le coppie

nell'atrio.
Ero uno del gregge.
E il gregge non si salva da solo e non salva nessuno.
Sta fermo. Aspetta. Guarda.
Poi la mattina dopo vede passare il carro e abbassa lo sguardo.

(Pausa. La domanda cruciale.)

La domanda che mi si apriva davanti allora non era quella di Giobbe - non era il silenzio di Dio di fronte al male.
Era un'altra:
e se neppure io fossi innocente?
E se invece fossi colpevole?
Non la colpa del sopravvissuto - quella la conoscevo.
Intendevo la possibilità che la mia ostinata incapacità di morire
non fosse estranea alle guerre ma le richiedesse.
Che io non fossi il testimone della violenza
ma una delle sue condizioni.
Pensavo a come funziona la memoria.
Una battaglia dimentica sé stessa nel momento in cui finisce:
i morti non ricordano, i vincitori ricordano male, i vinti non vogliono ricordare.
Qualcuno però deve farlo.
Qualcuno deve portare il peso di ciò che è accaduto
perché il prossimo esercito possa marciare
sapendo che c'è già stata Troia, e Lepanto, e Waterloo.
Avevo capito che la memoria delle guerre non scoraggia le guerre.
Anzi, le autorizza.
Ogni battaglia giustifica la successiva.
Ogni volta che si porta con sé un morto,
si sta costruendo un’altra guerra.

(Pausa. Svolta.)

Se sono colpevole, ho deciso di esserlo fino in fondo.
Smisi di leggere per capire e cominciai a leggere per meglio ricordare.
E ciò che tornava sempre, ostinato come un'immagine sognata più volte,

era un luogo della bassa Galilea
dove c'è una collina che attira eserciti.
Si chiama Megiddo.
Ci sono passato anch'io, in una delle mie vite -
non ricordo più quale, le battaglie si sovrappongono.
Ricordo però il suolo.
Ricordo quella terra rossa e arsa che sembrava avere sempre sete.
Quanti eserciti sono venuti a portarle contributi di sangue?
Il faraone Thutmose era passato di lì a fare strage di cananei.
Saul vi aveva trovato la sua fine insieme ai figli.
Poi i romani, gli arabi, i crociati, i mamelucchi, i francesi, gli inglesi, gli israeliani.
Ogni civiltà ha lasciato il suo sangue su quella collina.
Nessuna guerra è stata mai l'ultima.
Il suolo di Megiddo non ha mai smesso di bere.

(Più lento, quasi religioso.)

Megiddo è lo specchio di tutto ciò che ho vissuto.
Quel luogo è la prova che il male non arriva dall'esterno
ma cresce dal basso, dalla stessa terra che nutre il grano.
Megiddo aveva sete prima che arrivasse il primo esercito.
Continuerà ad avere sete dopo l'ultimo.
Non si combatte lì perché il luogo è maledetto.
È maledetto perché gli uomini non smettono di andarci -
portandosi dietro i loro Dei, le loro ragioni,
la loro certezza di essere i primi a combattere davvero per qualcosa che vale.
Il suolo di Megiddo lo sa.
Non ha memoria delle bandiere.
Ricorda soltanto il sangue,
e il sangue ha sempre lo stesso sapore.
Har Megiddo. Monte di Megiddo.
I greci lo chiamarono *Armaghedòn*.
Il secondo libro dell'Apocalisse afferma che lì si combatterà l'ultima battaglia -
quella in cui il male verrà sconfitto una volta per tutte.
L'esito è già scritto, dice il testo. Il bene vince.

Ho letto quella profezia molte volte nelle mie notti in portineria.
Non sono mai riuscito a credere all'esito.
Ho visto troppo sangue per convincermi che il male possa essere sconfitto -
scagliato fuori dal tempo come un ospite indesiderato.
Temo che il male non sia soltanto un ospite,
ma la struttura stessa della casa.

(Pausa. Rassegnato.)

Non credo più che gli uomini riescano a comprendere,
alleandosi in una fraterna intesa
contro una natura che li vuole tutti condannati a morte.
Le evidenze e il sangue versato dalla storia non possono alimentare illusioni.
Non mi rimane che aspettare la fine: quando il tempo non ci sarà più anche l'uomo scomparirà. Quando l'uomo scomparirà, anche il tempo non ci sarà più.
La pace che aspetto è la pace dei morti.

(L'attore apre le mani.)

Apro le mie mani e le osservo a lungo.
Ci sono delle rughe, segni di sforzi antichi.
Cicatrici che non ricordo come mi sono procurato.
La luce che vedo entra da una finestra che dà su un cortile interno.
Il tempo, per me, ha smesso di essere una linea.
È ora un cerchio.
O è forse soltanto una stanza in cui entro ed esco, senza mai sapere dove mi trovo.

(Finale.)

Ho visto nascere e morire la guerra più volte di quante possa ricordare.
Ogni volta, qualcuno aspetta un Dio che ce ne liberi.
Dio, però, non si affaccia al balcone della storia.
La sua parola crea il vuoto.
E noi siamo dentro quel vuoto.
Lo riempiamo di guerra, di sangue, di stendardi che cambiano colore.

Ho visto Ettore togliere l'elmo per abbracciare Astianatte.
Ho visto Achille trascinare il suo corpo intorno alle mura.
Ho visto Priamo baciare la mano che ha ucciso suo figlio.
E ho pensato: forse è questa la fine?
Forse è questo l'istante in cui tutto può finalmente fermarsi.
Niente si è fermato! Perché c'è qualcosa, nel mondo, che non vuole che la guerra si fermi.
Forse è un demone.
So che è più vecchio di me, più paziente, infinitamente più furbo.
Si è installato nel mio petto millenni fa, e da allora non ha mai smesso di sussurrarmi dentro.
Ho visto Spartaco nell'arena vuota, seduto sui gradini di pietra.
"La cosa più difficile non è morire in arena. È immaginare il dopo" mi disse.
Ho scoperto che non c'è un "dopo".
C'è solo la guerra che si ripete.
A Lepanto, mentre gli uomini bruciavano vivi nell'acqua,
vidi Dio contro Dio, stendardi che si alzavano e si abbassavano,
e il mare che diventava rosso.
A Waterloo, le industrie macinavano le ossa dei soldati per farne concime.
Il cannone non ha faccia. Il gas non ha espressione. Le radiazioni ancora meno.
Il demone è sempre lì, seduto sul petto del mondo.
Aspetta. Ha tutto il tempo per toglierci il nostro.
Ora siamo di nuovo all'inizio.
O forse siamo sempre stati qui, immobilizzati in un unico istante.
Lo spazio è fermo. Il tempo è fermo.
La guerra perenne sta preparando la tomba dell'umanità.

(Pausa. L'attore guarda il pubblico.)

Chi credevate di trovare qui a parlarvi della guerra?
Nell'albergo dove lavoro tutti fanno sesso.
Magari cantano e danzano.
Alla fine, però, il lavoro sporco tocca sempre a me.
Solo io rimango al mio posto - ma qual è il mio posto?
Anche Dio è finito chissà dove, e non so se sentirà l'eco della mia voce.

Non vi fate illusioni. Avete solo me.
Solo io posso raccontarvi l'inizio.
Perché l'inizio l'ho visto. L'ho visto tante volte.
Forse quell'inizio ci porterà a una fine che attendiamo da sempre,
dall'altra parte di questa stessa immobilità.
Vi sono rimasto solo io.
Io, qui, adesso. Un paria. Abbandonato. Rinnegato.
Io non sono un uomo come lo pensate voi.
Io sono una piega della vostra mente.
In tutte le battaglie e i secoli che ho attraversato,
il tempo ha smesso di scorrere dritto
e s'è ripiegato su sé stesso.
Pensateci.
Un uomo che non può morire è un uomo che non può neppure finire di nascere.
Io sono come un arco: più lo tendi, più è sé stesso.
E io sono teso da migliaia di anni.
Il tempo, per me, è un cerchio che non si chiude mai del tutto -
lascia sempre una fessura, e in quella fessura abito io.
Io sono un residuo.
Soltanto l'ostinazione di un corpo che non sa fare a meno di chiedersi,
"E se invece ci fosse qualcos'altro?"
Io sono nient'altro che uno spazio vuoto.
Una cerniera.
Sono una crepa da cui vedere il mondo, ma non sono mai riuscito a capire ciò che lo rende possibile.

(Pausa lunghissima. L'attore guarda il vuoto. Poi, piano.)

Io sono una piega nell'essere.
(Buio.)