

Dove ti metti cambia tutto: Teoria dei Giochi e geometria della competizione

Calienno Giulia – Inno Cristian – Pagliarulo Gaia – Pascale Carmine

3 ALM Liceo Scientifico Mancini, Avellino

Coordinati dalla Docente Ilaria Veronesi

iveronesi@unisa.it

Sunto - Il presente lavoro esplora il legame tra la Teoria dei Giochi e la Geometria attraverso il modello di Hotelling, uno strumento matematico utile per descrivere la competizione tra imprese in uno spazio lineare. A partire da domande vicine alla realtà quotidiana (perché negozi simili si concentrano nelle stesse zone? perché i partiti tendono ad avvicinare le proprie posizioni?) il modello permette di interpretare queste dinamiche in termini strategici. Nel caso lineare, due imprese scelgono dove collocarsi lungo una strada popolata da consumatori distribuiti uniformemente. L'analisi mostra che entrambe tendono a spostarsi verso il centro del mercato, fino a raggiungere una configurazione stabile corrispondente a un equilibrio di Nash. Successivamente il problema viene esteso al piano, rappresentando una città in cui i clienti scelgono il punto vendita più vicino. La suddivisione del mercato è allora descritta dalla tassellazione di Voronoi, che assegna a ogni impresa la propria area di influenza. Viene infine discusso il problema dell'ingresso di un nuovo concorrente, individuando posizioni ottimali attraverso criteri geometrici di massima

distanza. Il lavoro mostra come concetti matematici essenziali possano spiegare in modo rigoroso fenomeni economici e sociali osservabili nella vita quotidiana.

1. Introduzione

Perché spesso osserviamo due attività commerciali simili situate una accanto all'altra? E per quale motivo, durante una campagna elettorale, i partiti tendono a proporre programmi sempre più simili? Questi fenomeni, pur appartenendo a contesti diversi, possono essere interpretati attraverso modelli di scelta strategica. In particolare, il modello di Hotelling rappresenta uno degli strumenti più semplici ed efficaci per descrivere matematicamente la competizione tra agenti economici nello spazio. L'obiettivo di questo lavoro è comprendere non solo il risultato del modello, ma soprattutto il meccanismo logico che porta a tale risultato, evidenziando il ruolo della geometria e della distanza nelle scelte strategiche.

2. Il modello lineare di Hotelling

Consideriamo una strada lungo la quale i consumatori sono distribuiti uniformemente. Due imprese, A e B, devono scegliere una posizione su questo segmento. Ogni consumatore acquista dal venditore più vicino. Questo significa che il mercato viene diviso in due parti: il punto di separazione è esattamente il punto medio tra le due imprese.

Hotelling's Line Model

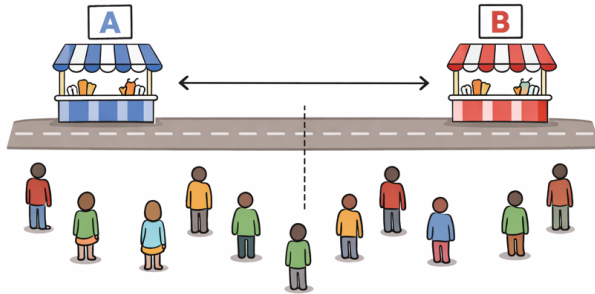


Figura 1. Rappresentazione del modello lineare di Hotelling con due imprese e suddivisione del mercato nel punto medio.

Rappresentiamo la strada col segmento $[0,1]$, lungo il quale i consumatori sono distribuiti uniformemente. Supponiamo che un'impresa si trovi in posizione x e l'altra in posizione y , con $x < y$. Il consumatore "indifferente" si trova nel punto $\frac{x+y}{2}$:

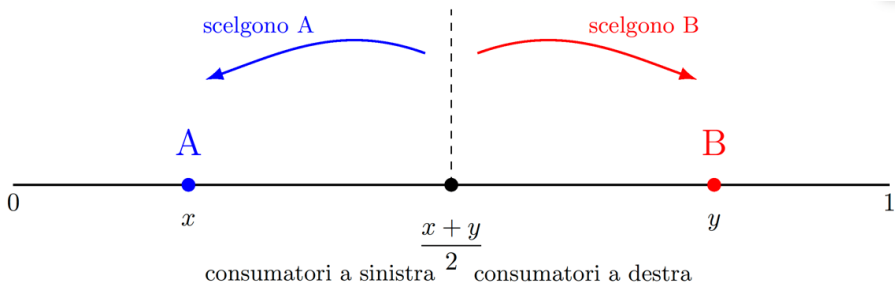


Figura 2. Nel modello lineare di Hotelling il consumatore indifferente si trova nel punto $\frac{x+y}{2}$, che separa i bacini di utenza delle due imprese.

- Tutti i consumatori a sinistra di questo punto scelgono l'impresa in x ;
- Tutti quelli a destra scelgono l'impresa in y .

Quindi, la quota di mercato di ciascuna impresa dipende direttamente dalla sua posizione relativa rispetto all'altra. Il punto chiave è che ogni impresa tende a spostarsi verso il centro del segmento. Infatti:

- Se un'impresa è troppo a sinistra, può aumentare i clienti spostandosi verso destra;
- Se è troppo a destra, conviene spostarsi verso sinistra.

Questo processo continua finché entrambe non si trovano al centro, cioè in $x = y = 0.5$. In questa configurazione:

- il mercato è diviso esattamente a metà;
- nessuna impresa può migliorare la propria posizione spostandosi unilateralmente

Questa situazione è un equilibrio, detto di Nash, perché ogni scelta è la migliore possibile dato ciò che fa l'altro. L'aspetto più interessante è che l'equilibrio non porta alla differenziazione (come si potrebbe pensare), ma alla massima concentrazione.

3. Estensione al piano: una visione geometrica

Passiamo ora a un contesto più realistico: una città, rappresentata come una regione del piano, in cui i consumatori sono distribuiti nello spazio.

Anche qui ogni consumatore sceglie l'impresa più vicina. Tuttavia, la divisione del mercato non è più un punto, ma una linea: il luogo dei punti equidistanti dalle due imprese.

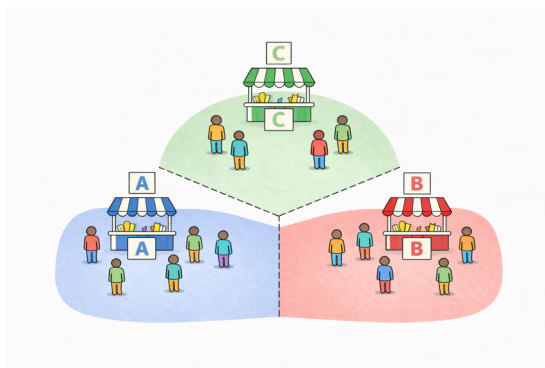


Figura 3. Estensione del modello di Hotelling al piano: ogni impresa controlla la regione formata dai consumatori a essa più vicini.

Questa linea è l'asse del segmento che unisce le due posizioni. Essa divide il piano in due regioni:

- una regione di punti più vicini alla prima impresa;
- una regione di punti più vicini alla seconda.

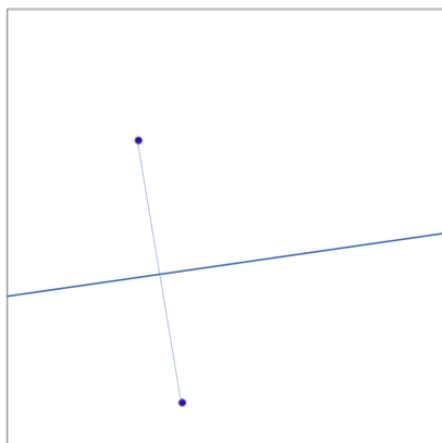


Figura 4. Suddivisione del mercato nel caso di 2 imprese

Nel caso generale con più imprese, questa costruzione porta alla tassellazione di Voronoi, in cui il piano è suddiviso in celle, ciascuna associata a un punto, ovvero un'impresa.

Questa struttura geometrica è fondamentale perché:

- traduce un problema economico in un problema di distanza;
- permette di visualizzare chiaramente la competizione;
- mostra come la posizione nello spazio determini direttamente il mercato.

L'equilibrio, in questo contesto, dipende dalla forma del dominio e dalla distribuzione dei consumatori, ma il principio resta lo stesso: ogni impresa cerca di posizionarsi in modo da “rubare” più spazio possibile agli altri.

4. Analizziamo la geometria del problema

Cerchiamo ora di descrivere in maniera rigorosa la costruzione geometrica del modello nel piano senza addentrarci nei tecnicismi matematici.

Nel modello di localizzazione immaginiamo una città come una regione del piano in cui i consumatori sono distribuiti nello spazio e alcuni negozi sono già presenti in posizioni fissate.

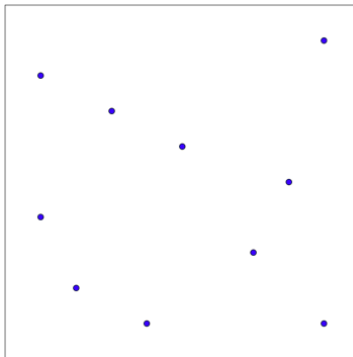


Figura 5. Generalizziamo il nostro studio con 10 imprese (Bimonte et al. 2023)

Supponiamo che tutti vendano lo stesso prodotto allo stesso prezzo: in questo caso ogni cliente sceglie semplicemente il punto vendita più vicino.

Per descrivere matematicamente questa scelta si utilizza la tassellazione di Voronoi, che è una partizione del piano in celle, dove ogni cella raccoglie i punti più vicini a un certo negozio rispetto agli altri. L'area di ciascuna regione rappresenta quindi il bacino potenziale di clienti del relativo esercizio commerciale.

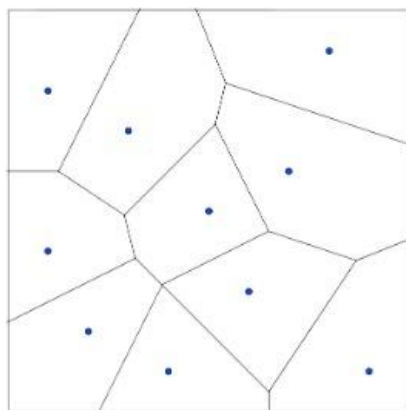


Figura 6. Tassellazione di Voronoi nel piano: il mercato è suddiviso in regioni, ciascuna composta dai punti più vicini a una determinata impresa (Bimonte et al. 2023)

Se un nuovo retailer vuole entrare nel mercato, il suo obiettivo sarà collocarsi in una zona in cui possa conquistare la porzione più ampia possibile di territorio e quindi di clientela. In generale conviene scegliere un punto sufficientemente lontano dai concorrenti già presenti, così da creare una nuova cella di Voronoi estesa.

Un criterio geometrico molto utile consiste nel cercare il più grande cerchio vuoto contenuto nella città che non contenga al suo interno nessun negozio esistente: il centro di questo cerchio rappresenta spesso una

posizione ottimale per il nuovo ingresso, perché massimizza la distanza dagli altri e consente di attrarre consumatori da una regione più ampia.

Per individuare il centro dei possibili cerchi massimi, è sufficiente cercarlo nei vertici del diagramma di Voronoi, punti in cui si incontrano tre o più celle e che risultano equidistanti dai negozi più vicini.

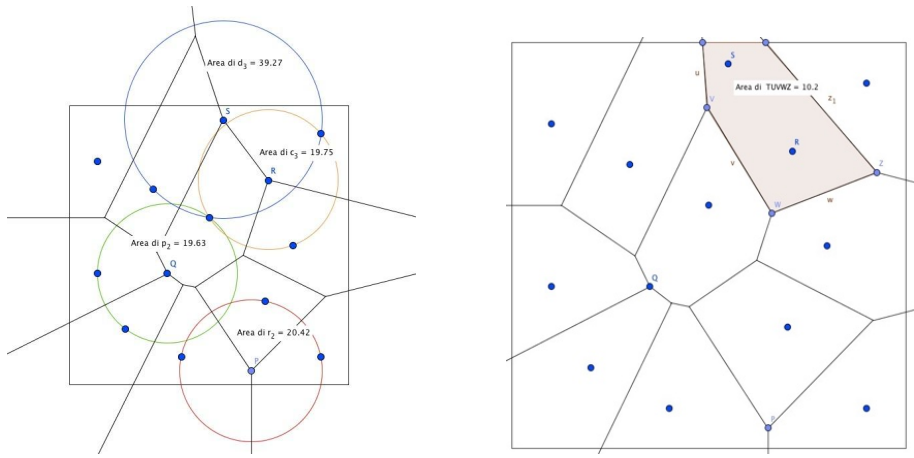


Figura 7. Il centro del massimo cerchio vuoto, individuabile tra i vertici del diagramma di Voronoi, suggerisce la collocazione ottimale di un nuovo punto vendita (Bimonte et al. 2023)

Quando nessuna impresa ha convenienza a spostarsi ulteriormente, il sistema raggiunge una configurazione stabile, interpretabile come equilibrio strategico.

5. Equilibrio e implicazioni

L'analisi del modello lineare di Hotelling e del modello di Voronoi nel piano evidenzia come la competizione non porti necessariamente alla differenziazione, ma spesso alla convergenza.

Nel caso lineare, le imprese si concentrano nello stesso punto. Nel piano, la configurazione dipende dalla geometria dello spazio e dalla distribuzione dei consumatori, ma resta governata da principi di ottimiz-

zazione locale. Questo approccio permette di comprendere fenomeni reali in diversi ambiti:

- distribuzione dei negozi (tendenza di numerose presenze di negozi dello stesso tipo in spazi ravvicinati);
- strategie politiche (in cui durante le campagne elettorali i partiti tendono talvolta ad avvicinare le proprie posizioni per intercettare una fascia più ampia di elettori);
- piattaforme digitali e mercati online (dove le imprese competono per occupare segmenti simili di mercato).

In tutti questi casi, la strategia ottimale non è distinguersi completamente, ma posizionarsi in modo competitivo rispetto agli altri.

6. Conclusioni

Attraverso la nostra analisi, abbiamo osservato come un sistema molto semplice, basato su distanza e scelta razionale, sia in grado di generare risultati complessi e realistici.

I punti di ottimo individuati attraverso la costruzione geometrica non rappresentano soltanto una soluzione intuitiva del problema. Nel teorema di Zhao (2008) è infatti dimostrato che tali configurazioni corrispondono agli equilibri di Nash del gioco di localizzazione considerato. Ciò significa che ogni impresa sceglie la propria posizione tenendo conto di quella del concorrente e cercando di migliorare il proprio bacino di clienti. Una volta raggiunte queste posizioni, nessun concorrente ha convenienza a modificare unilateralmente la propria scelta per ottenere un vantaggio maggiore. Questo risultato mette in evidenza il legame tra approccio geometrico e Teoria dei Giochi, mostrando come due prospettive diverse conducano alla stessa soluzione.

Nello studio del modello nel piano, l'utilizzo di GeoGebra si è rivelato particolarmente efficace, poiché ha permesso di costruire dinamicamente diagrammi di Voronoi, visualizzare i cambiamenti delle regioni di

influenza e individuare in modo immediato possibili configurazioni ottimali. L'impiego della tecnologia ha reso così più accessibili concetti geometrici e strategici altrimenti più complessi da rappresentare.

La combinazione tra Teoria dei Giochi e geometria permette di interpretare fenomeni quotidiani con strumenti matematici rigorosi, evidenziando come lo spazio e la posizione influenzino profondamente le decisioni strategiche.

Questo dimostra il valore della matematica come strumento di comprensione del reale, capace di collegare intuizione, formalizzazione e applicazioni concrete.

7. Valore didattico del percorso

Questa attività è molto utile in un liceo perché mostra agli studenti una matematica viva, capace di spiegare fenomeni reali e vicini alla loro esperienza. Spesso la matematica scolastica viene percepita come un insieme di formule e procedure astratte; in questo caso, invece, diventa uno strumento per comprendere perché i negozi si concentrano in certe zone, come nasce la competizione tra imprese o come si distribuiscono sul territorio servizi come farmacie, ospedali o centri logistici. Attraverso il modello di Hotelling e la tassellazione di Voronoi, concetti come distanza, equilibrio e ottimizzazione acquistano un significato concreto e immediato.

Un ulteriore valore del percorso è la sua forte dimensione interdisciplinare. L'attività mette infatti in dialogo matematica, economia, geometria, informatica e scienze sociali, mostrando come problemi complessi possano essere affrontati da prospettive diverse ma complementari. Gli studenti comprendono così che le discipline non sono compartimenti separati, ma strumenti che possono collaborare per interpretare la realtà.

Dal punto di vista didattico, il percorso stimola il ragionamento, abitua a tradurre un problema reale in un modello matematico e aiuta a interpretare criticamente i risultati ottenuti. Inoltre, l'utilizzo di soft-

ware dinamici come GeoGebra rende il lavoro più coinvolgente: gli studenti possono sperimentare, modificare le configurazioni e osservare direttamente come cambiano gli equilibri. In questo modo la matematica non viene solo studiata, ma anche esplorata e discussa, diventando un'esperienza più attiva, aperta al confronto e motivante.

BIBLIOGRAFIA

- Bimonte, G., Tortoriello, F.S. & Veronesi, I. (2023). *An interdisciplinary educational path to understand the economic phenomena of a fluid and complex world with mathematics*. Soft Computing
- Hotelling H. (1929). *Stability in Competition*, Economic Journal
- Voronoi G. (1908). *Nouvelles applications des paramètres continus à la théorie des formes quadratiques*, Journal für die reine und angewandte Mathematik
- Nash J. (1950). *Equilibrium Points in n-Person Games*, Proceedings of the National Academy of Sciences.