



2025

QUADERNI CACCIOPPOLI

PERIODICO QUADRIMESTRALE DI CULTURA INTERDISCIPLINARE

DIRETTORE

Rosa Maria Testa

ANFSU

ASSOCIAZIONE NAPOLETANA
FILOSOFIA E SCIENZE UMANE "R. CACCIOPPOLI"



CONSIGLIO DIRETTIVO

Presidente Onorario

Franco Eugeni

Presidente

Ferdinando Casolaro

Vice Presidente

Vincenzo Gagliotta

Responsabile

Rapporti con Istituzioni e Università

Giuliana De Lorenzo

Segretario

Antonio Lungo

Tesoriere

Salvatore Sessa

CONSIGLIERI

Daniela De Cato

Giovanna Della Vecchia

Serafina Ippolito

Giuseppe Mangione

Saverio Petitti

Letizia Testa

Ciro Totaro

Giovanni Vincenzi

COMITATO DI REDAZIONE

*Direttore di redazione
Giuseppe Mangione*

*Condirettore di redazione
Ferdinando Casolaro*

Nicla Palladino

Immacolato Iannone

REDATTORI

*Daniela De Cato
I.S.I.S Enrico Caruso*

*Giovanna Della Vecchia
Università "Federico II"*

*Luca Paladino
ITIS "G. Ferraris" Napoli*

*Alessandra Rotunno
L.S. "A. Labriola" Napoli*

*Ciro Totaro
ITIS "G. Ferraris" Napoli*

PROGETTO GRAFICO

*Daniela De Cato
I.S.I.S Enrico Caruso*

QUADERNI CACCIOPPOLI

Lettera del Direttore

Benvenuti su "Quaderni Caccioppoli"

In un'epoca in cui la connessione tra scienza e società è più cruciale che mai, è con grande entusiasmo che vi diamo il benvenuto alla nostra rivista socio-culturale. Qui, tra riflessioni, approfondimenti e storie di vita, intendiamo esplorare le intersezioni tra arte, cultura, pensiero critico e il mondo della scienza.

Il motore del nostro viaggio è stato acceso da una figura straordinaria: Renato Caccioppoli, matematico napoletano di rara genialità e sensibilità, che ha lasciato un segno indelebile non solo nella matematica ma anche nella cultura e nella società del novecento. Caccioppoli non era solo un uomo di formule e teoremi, ma un intellettuale capace di comprendere e interpretare le dinamiche sociali del suo tempo con straordinaria profondità.

La sua carriera fu una danza tra rigore scientifico e spirito libero, tra il formalismo matematico e l'empatia verso le difficoltà umane. E Napoli, sua città natale, ricca di vivaci contrasti e vibrante energia, fu il palcoscenico ideale per il suo pensiero e il suo impegno. Attraverso la sua figura, vogliamo esprimere una delle missioni fondamentali di questa rivista: abbattere barriere e stimolare il dialogo tra le discipline, tra passato e presente, e soprattutto tra le persone.

"Quaderni Caccioppoli", infatti, nasce dalla convinzione che il vero progresso risieda nella capacità di costruire ponti. Dalla scienza alla letteratura, dalla storia alla tecnologia, dalla filosofia al diritto, non esiste area che non sia degna di curiosità e celebrazione. Così la nostra rivista desidera essere un ponte tra gli insegnamenti e un punto di riferimento per chi desidera guardare oltre e comprendere e plasmare la società contemporanea. L'obiettivo che la rivista intende perseguire risiede nella valorizzazione del pensiero critico attraverso riflessioni ispirate da filosofi classici e contemporanei, stimolando il dibattito soprattutto fra i giovani e i giovanissimi su temi etici e sociali che definiscono la nostra epoca.

Al contempo, la dimensione giuridica rappresenta un'altra direttrice fondamentale de "Quaderni Caccioppoli". Il diritto, infatti, non va inquadrato soltanto come un insieme di regole, ma come una disciplina viva, capace di tutelare i diritti fondamentali,

promuovere la giustizia e riflettere i cambiamenti culturali e politici. Attraverso gli articoli che arricchiranno la nostra rivista, nati tra i banchi di scuola, con il prezioso ausilio dei docenti-tutor, vogliamo metterci al servizio di coloro che avranno un ruolo determinante nella costruzione di una società equa e sostenibile.

Siate, dunque, tutti benvenuti in queste pagine e benvenuta anch'io che da questo n. 1 Aprile 2025 sarò alla guida de "Quaderni Caccioppoli" in qualità di Direttore della rivista. Ringrazio il Presidente dell'ANFSU, Prof. Ferdinando Casolaro, che, con coraggio e un pizzico di spregiudicatezza, ha pensato a me come capitano di questa avventura. Spero di dipanare con grinta e dinamismo questo ruolo facendo di siffatto periodico un luogo di riflessione, ispirazione e dialogo, giacché il sapere è vivo, pulsante, e ha sempre bisogno di un nuovo orizzonte.

Non resta, quindi, che unirvi a noi in questo viaggio, perché, come ci insegna la vita di Caccioppoli, la curiosità e il coraggio rappresentano la spinta al cambiamento, alla crescita, alla vera evoluzione, portando ad unire aspetti apparentemente distanti.

Con sentito entusiasmo, Rosa Maria Testa.

Rosa Maria Testa nasce a Napoli il 05.01.1967. Si laurea in Giurisprudenza presso l'Università di Napoli "Federico II" e si abilita all'esercizio della professione forense. Lavora come funzionario presso l'Università degli studi della Campania "L. Vanvitelli" e dal 2021 è giornalista pubblicista iscritta all'O.d.G. della Campania. Appassionata del Napoli e della sua città, ama confrontarsi con nuove sfide, il suo motto è: se lo pensi lo puoi fare.

EDITORIALE

di Ferdinando Casolaro

Con l’apertura del terzo anno di attività dell’Associazione Napoletana Filosofia e Scienze Umane “R. Caccioppoli” (ANFSU) e di pubblicazione dell’organo ufficiale “Quaderni Caccioppoli”, il Consiglio Direttivo ha proposto e realizzato una razionalizzazione della rivista, con l’inserimento del codice ISBN e l’affidamento della Direzione alla dott.ssa Rosa Maria Testa, giornalista pubblicista, a cui vanno i ringraziamenti della nostra comunità associativa per il lavoro che già sta svolgendo con la pubblicazione del corrente fascicolo.

Relativamente alle attività da espletare nel corrente anno, si è stabilito di dare continuità alle iniziative già svolte nei primi due anni di esistenza della nostra associazione; tali attività si possono sintetizzare come segue:

- ***Terzo Convegno della Festa Internazionale della Matematica***, già svoltosi il 17 marzo 2025 nell’auditorium dell’ITIS “G. Ferraris” di Napoli. La manifestazione ha visto la presenza di oltre 250 partecipanti tra studenti, docenti e dirigenti, e la quasi totalità dei lavori degli studenti è presentata in questo fascicolo dei “Quaderni Caccioppoli”.

- ***Terzo Congresso ANFSU “Renato Caccioppoli”*** dal titolo: “*Intelligenza umana e intelligenza artificiale: storie di diritti e conquiste umane, sociali, scientifiche e digitali*”, organizzato in collaborazione con l’ISIS “E. Caruso” di Napoli, che ospiterà i lavori nella giornata del 9 maggio 2025, e con la V Municipalità della Città Metropolitana di Napoli, nella cui Sala del Centro Giovanile si svolgerà la seconda giornata del Congresso, il 10 maggio 2025.

- **XVIII° Convegno “*Studenti in cattedra, docenti nei banchi*”**, per la premiazione dei Giochi matematici per la Scuola <Premio Aldo Morelli>, che si terrà al liceo “Don Milani” di Gragnano nei giorni 23-24 maggio 2025. Il Convegno è programmato annualmente, dal 2007 a tutt’oggi, dalle associazioni “Mathemare” di Castellammare di Stabia e Mathesis Napoli “A. Morelli”. Negli ultimi anni l’organizzazione ha usufruito del contributo delle associazioni ANFSU “R. Caccioppoli” e “MathPhys” di Salerno. Le risultanze delle relazioni degli studenti sono raccolte nei fascicoli n. 1 e n. 2, anno 2025 della rivista “Quaderni Caccioppoli”.

- **Secondo Convegno “*MatEleatica 2025: La Matematica e la cultura classica*”**, che si svolgerà all’Hotel Eleamare di Ascea (SA) nei giorni 16-18 maggio 2025, organizzato dall’associazione “MathPhys” di Salerno in collaborazione con ANFSU “R. Caccioppoli” e “Mathesis” Napoli “A. Morelli”.

- **V° Convegno dell’Alta Costiera Amalfitana** - in collaborazione con le associazioni Mathesis Napoli “A. Morelli”, “Math&Phys” Salerno, “Mathemare” di Castellammare di Stabia e con le Accademie AFSU in Teramo e APAV, che si svolgerà nei giorni 5-7 settembre 2025 al Campus Principe di Napoli, in San Lazzaro di Agerola (NA). Come negli anni precedenti, il Convegno di Agerola prevede la pubblicazione degli atti - edita da Universitalia srl - che sarà prodotta e distribuita dall’ANFSU come supplemento del n. 3 - settembre 2025 del “Periodico di Matematica”, la rivista scientifica dell’AFSU in Teramo gemellata con ANFSU “R. Caccioppoli” e associata alle nostre attività editoriali.

- **Secondo Convegno “*I mille volti di Napoli*”**, nell’ambito del Progetto *Campania Libri in Tour-Fondazione Campania dei Festival*, finalizzato alla promozione, tra i giovani, della cultura e della passione per la lettura, che si terrà il 3 ottobre 2025 in sede da stabilire.

Inoltre, il Consiglio Direttivo ha deliberato di partecipare alla Manifestazione “Futuro Remoto” che si svolgerà a Citta della Scienza nel mese di ottobre 2025.

Le attività del corrente anno solare si concluderanno con l'espletamento di un Convegno, previsto per il prossimo mese di dicembre, nell'ambito del Progetto della Commissione Promozione Cultura della Regione Campania 2025, al cui bando l'ANFSU ha fatto richiesta di partecipazione.

QUADERNI CACCIOPPOLI
SEZIONE 1

La parola agli studenti

I.T.I.S. GALILEO FERRARIS - NAPOLI

Nascita di un numero magico

a cura di

Agostino Baiano - Antonio Castiello della classe 4° T
coordinati dalla professoressa Maria Di Maro

L'articolo riproduce il primo intervento degli studenti alla manifestazione "Giornata Internazionale della Matematica", tenutasi il 17 marzo 2025, nell'Auditorium dell'ITI Ferraris di Napoli, organizzato dall'Associazione Mathesis Napoli "A. Morelli e S. Rao", in collaborazione con l'Accademia Napoletana di Filosofia delle Scienze Umane "R. Caccioppoli" (ANFSU) e l'Associazione per l'Insegnamento della Fisica ETS Sezione di Napoli, dedicata alla memoria del Prof. Salvatore Rao. Nell'ambito di un percorso interdisciplinare, sviluppato nelle classi del triennio della sez. T del Ferraris, gli studenti tracciano la storia della scoperta del π matematico a partire dalla definizione di "numero irrazionale trascendente".

Il pi greco: definizione e storia

Con il simbolo π indichiamo un numero irrazionale trascendente.

IRRAZIONALE significa non razionale, cioè che $\notin \mathbb{Q}$ e quindi che non si può scrivere come un rapporto del tipo $\frac{a}{b}$ con $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z} - \{0\}$, ovvero un numero decimale illimitato non periodico.

TRASCENDENTE significa non algebrico, cioè non riconducibile alla soluzione di alcuna equazione polinomiale a coefficienti razionali.

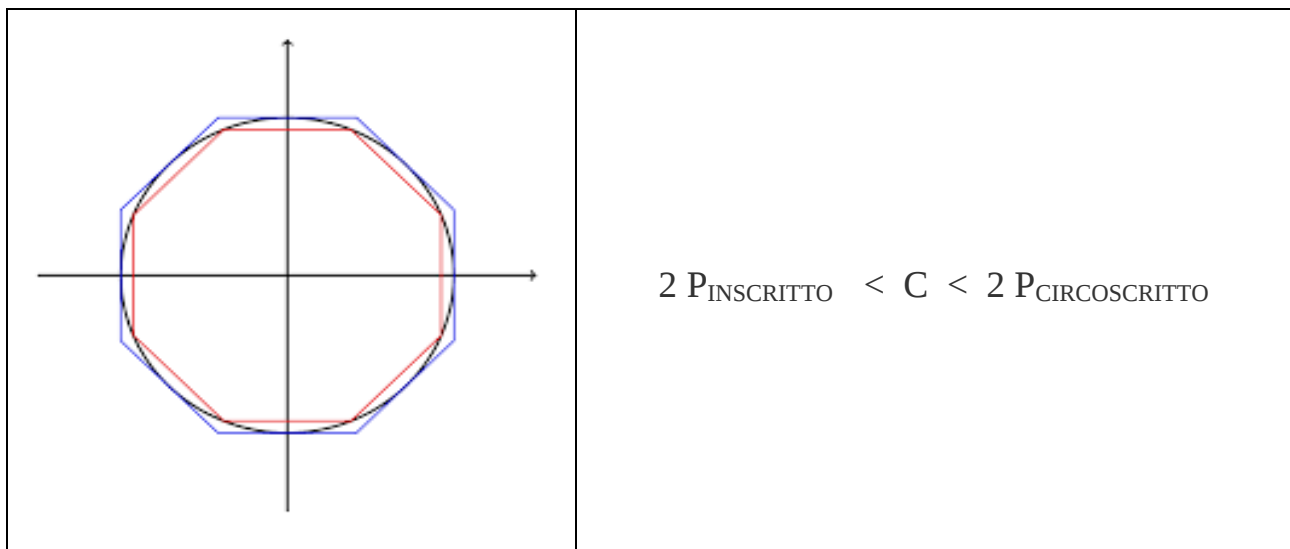
La sua definizione è di tipo geometrico, infatti π è definito come il rapporto fra la lunghezza di una circonferenza (C) e quella del suo diametro ($2r$):

$$\pi = \frac{C}{2r}$$

Che questo numero fosse una costante era noto già agli antichi Babilonesi che lo ritenevano uguale a $3 + \frac{1}{8} = 3.125$ (decimale limitato e quindi numero razionale). Anche gli antichi Egizi avevano cercato di dare un valore preciso a π , che, come testimonia il papiro di Rhind del 1650 a.C. oggi conservato al British Museum di Londra, fu ritenuto uguale a $\left(\frac{16}{9}\right)^2 = 3,16043827$ (decimale illimitato periodico e quindi ancora un numero razionale).

Il primo a comprendere che π non fosse un numero razionale, bensì un numero decimale illimitato non periodico, fu Archimede da Siracusa intorno al 250 a.C.

L'idea base di Archimede fu quella di considerare la lunghezza della circonferenza come un valore compreso fra il perimetro del poligono regolare inscritto nella circonferenza ed il perimetro del poligono regolare circoscritto alla circonferenza, ovviamente con lo stesso numero di lati



Archimede calcolò il perimetro di poligoni regolari fino a 96 lati inscritti e circoscritti alla stessa circonferenza concludendo che:

$$\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$$

Una curiosità: questa valutazione che risale a più di 2000 anni contiene un errore di meno di 3 decimillesimi del valore reale (tutto senza calcolatrice).

I risultati ottenuti da Archimede anticiparono molte delle idee e dei metodi del calcolo integrale che verrà poi sviluppato 1300 anni dopo, da Newton e Leibnitz, ma questa è un'altra storia.

Noi che oggi conosciamo la teoria dei limiti possiamo riassumere il concetto dicendo che facendo tendere a $+\infty$ il numero dei lati dei poligoni inscritti e circoscritti i loro perimetri tenderanno a coincidere con la lunghezza della circonferenza, cioè:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 2 P_{INSCRITTO} < C < \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 P_{CIRCOSCRITTO}$$

Dividendo tutto per $2r$ dove r è il raggio della circonferenza e pertanto sempre $\neq 0$, si ha:

$$\frac{\lim_{n \rightarrow +\infty} 2 P_{INSCRITTO}}{2r} = \pi = \frac{\lim_{n \rightarrow +\infty} 2 P_{CIRCOSCRITTO}}{2r}$$

Un'altra curiosità: pare che la costante si chiami così perché è l'iniziale della parola greca περιφέρεια (si legge *perifereia*), che in greco significa proprio circonferenza.

La spirale di Teodoro

a cura di

Fabio Cuomo, Claudia Ercole, Ciro Strazzullo della classe 3° T
coordinati dalla professoressa Maria Di Maro

L'articolo riproduce l'intervento degli studenti alla manifestazione "Giornata Internazionale della Matematica", tenutasi il 17 marzo 2025, nell'Auditorium dell'ITI Ferraris di Napoli, organizzato dall'Associazione Mathesis Napoli "A. Morelli e S. Rao", in collaborazione con l'Accademia Napoletana di Filosofia delle Scienze Umane "R. Caccioppoli" (ANFSU) e l'Associazione per l'Insegnamento della Fisica ETS Sezione di Napoli, dedicata alla memoria del Prof. Salvatore Rao. Nell'ambito di un percorso interdisciplinare, sviluppato nelle classi del triennio della sez. T del Ferraris, gli studenti illustrano il procedimento di costruzione della "Spirale di Teodoro", che consente la rappresentazione geometrica dei numeri irrazionali.

L'intuizione di Teodoro

Teodoro di Cirene è un matematico e filosofo greco vissuto nel V secolo a.C., noto per la sua appartenenza alla scuola pitagorica.

Seguace delle idee di Pitagora, si dedicò allo studio dei numeri e delle figure geometriche.

Il suo lavoro più importante fu la realizzazione del modello noto come "Spirale di Teodoro" che consente la costruzione geometrica dei radicali quadratici. L'intuizione di Teodoro fu così importante da mandare in crisi l'intera scuola pitagorica.

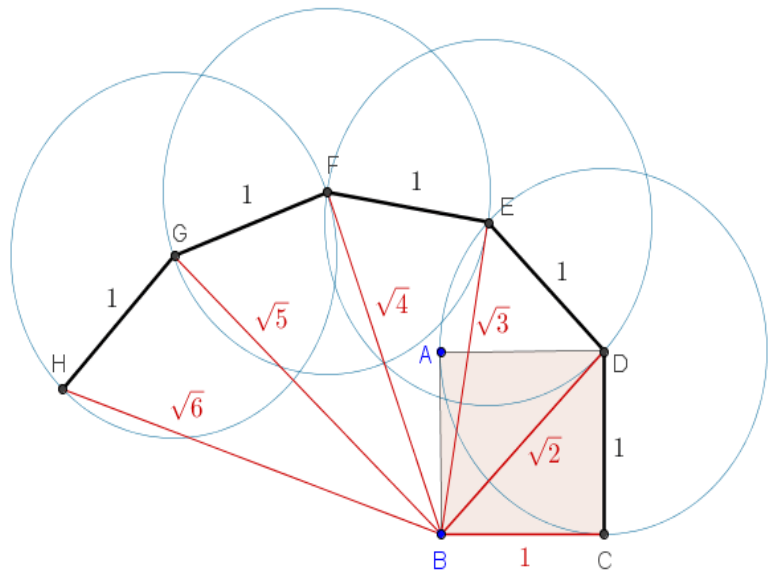
La costruzione della Spirale di Teodoro di Cirene

La Spirale di Teodoro, attribuita al matematico greco Teodoro di Cirene, si costruisce partendo da un segmento iniziale **BC** di lunghezza 1. Successivamente, si traccia un segmento **CD**, anch'esso di lunghezza 1, perpendicolare a **BC**.

Collegando i punti **B** e **D**, si ottiene l'ipotenusa del triangolo rettangolo **BCD**, la cui lunghezza, calcolata applicando il Teorema di Pitagora, è pari a $\sqrt{2}$.

Si prosegue tracciando un nuovo segmento **DE** di lunghezza 1, perpendicolare all'ipotenusa **BD** appena ottenuta. Unendo poi il punto **E** con il punto **B**, si ottiene una nuova ipotenusa, la cui lunghezza corrisponde a $\sqrt{3}$.

Questo procedimento si ripete all'infinito, generando una sequenza di triangoli rettangoli, in cui ogni ipotenusa ha una lunghezza pari alla radice quadrata di un numero intero crescente. La costruzione della Spirale di Teodoro permette di rappresentare geometricamente la successione dei numeri irrazionali della forma $\sqrt{n}$, offrendo una visualizzazione efficace del concetto di radicale.



I.T.I.S. GALILEO FERRARIS - NAPOLI

I numeri e la realtà: riflessioni storico-filosofiche

a cura di

Francesco Bava, Fabio Vuolo della classe 4° T
coordinati dai docenti Clara Di Antonio, Giuseppe Mangione

L'articolo riproduce l'intervento degli studenti alla manifestazione "Giornata Internazionale della Matematica", tenutasi il 17 marzo 2025 presso l'ITI Ferraris di Napoli, organizzata da Mathesis Napoli e ANFSU "R. Caccioppoli", dedicata alla memoria del Prof. Salvatore Rao. Nell'ambito di un percorso interdisciplinare, sviluppato nelle classi del triennio della sez. T del Ferraris, gli studenti espongono alcune riflessioni filosofiche sollecitate dalla scoperta dei numeri irrazionali in matematica e dal collegato tema dell'incommensurabilità: La matematica è scoperta o invenzione? Le verità matematiche sono assolute?

A scuola si discute anche di matematica e filosofia

A scuola, fra compagni, ci siamo trovati a parlare di incommensurabilità e di numeri irrazionali. Questi temi hanno sollecitato in noi l'approfondimento di alcune tematiche relative alla storia della matematica e al suo collegamento col pensiero filosofico. Una prima questione riguarda il ruolo che la scoperta dei numeri irrazionali ebbe nella crisi della prima scuola filosofica dell'antichità, dove lo studio di matematica e filosofia convivevano e si compenetravano: **la scuola pitagorica**. La seconda questione filosofica invece attiene alla seguente domanda: **la matematica è un'invenzione dell'uomo oppure è una scoperta di leggi che esistono nella realtà, indipendentemente dal pensiero dell'uomo?**

La crisi del concetto di numero pitagorico

La matematica pitagorica era fondata sul concetto di discontinuità. Per i Pitagorici esistevano strette relazioni tra i numeri e le forme realizzabili con il corrispondente numero di punti ed elaborarono una teoria dei *numeri* (interi) come principi di spiegazione ultima della realtà: le leggi che regolavano i rapporti tra i numeri spiegavano anche i rapporti tra le cose reali e per questo la matematica veniva considerata come la forma più alta di conoscenza. Non a caso nelle scuole pitagoriche (che avevano il carattere di comunità religiosa, scientifica e politica) venivano chiamati *matematici* gli adepti a cui era consentito approfondire la dottrina, mentre coloro che erano soltanto ammessi all'ascolto delle lezioni venivano designati con il termine di *acusmatici*. Comunque sulla storia e la vita delle comunità pitagoriche sono state tramandate storie di dubbia autenticità. Uno dei testi di riferimento, *La vita di Pitagora*, fu scritto dal filosofo Giamblico ad otto secoli di distanza (250-300 d. C.) dalla presunta epoca in cui visse Pitagora (VI sec. a. C.). Gli studiosi ritengono però fondata la tesi che la scoperta degli incommensurabili provocò un trauma nei pitagorici, al punto di ispirare la leggenda che vede protagonista Ippaso di Metaponto, matematico che diffuse il segreto fuori della cerchia pitagorica e per questo fu affogato nel mare di Crotone. Si tratta del noto problema dell'incommensurabilità tra diagonale e lato di un quadrato, che impedisce di considerare tutte le grandezze come multiple della stessa *grandezza punto*. Cade quindi quella corrispondenza tra numeri e figure geometriche, sulla quale i pitagorici avevano fondato anche le rappresentazioni attraverso *numeri gnomoni*, da cui ricavavano leggi e proprietà generali, come quella per cui ogni numero dispari corrisponde alla *differenza tra due quadrati* dei due numeri consecutivi di cui il numero dato è la somma. La crisi della matematica pitagorica fu uno dei motivi che spinsero i greci a “scindere completamente la geometria dall'aritmetica, interpretando la prima come studio del continuo e la seconda come studio del discontinuo” (Geymonat, 1971, v. 1, p. 17).

Matematica: invenzione o scoperta?

La seconda questione filosofica a cui accenniamo è la seguente: **la matematica è una scoperta o un'invenzione dell'uomo?** L'uomo scopre leggi, rapporti e relazioni che esistono nella realtà indipendentemente dall'uomo stesso? Il mondo è matematico, oppure matematica è la mente umana, che interpreta la realtà basandosi sulle sue potenzialità e sulla sua struttura cognitiva? Questa questione sollecita immediatamente un altro quesito: la matematica ci trasmette delle verità indubitabili ed eterne, oppure è uno strumento, un linguaggio attraverso il quale creiamo procedimenti che ci permettono certamente di padroneggiare la realtà, ma che non vanno considerati come verità assolute? Matematici e filosofi hanno dato risposte diverse a questi quesiti, che ripercorriamo in un breve excursus storico.

La tesi della matematica come scoperta, cioè che *il mondo è matematico*, come abbiamo visto è la tesi dei pitagorici (*tutto è numero*) e sarà, con qualche differenza, anche quella di **Platone**. Infatti mentre per i Pitagorici gli enti matematici esistono e sono immanenti alla realtà, per Platone esistono in una dimensione separata dalla realtà. Per entrambi, però, la matematica ci consente di avvicinarci a verità eterne (tesi che sarà definita anche “platonismo matematico”). Platone sosteneva che chi non sapesse di geometria non poteva accostarsi alla sua dottrina, in quanto il sapere matematico apriva la strada alla comprensione delle idee universali, che costituiscono la base della sua filosofia e la chiave per dare un'interpretazione non illusoria della realtà, che consente all'uomo di uscire dalla caverna dell'opinione per accedere alla verità della scienza e della filosofia.

Con **Aristotele**, invece, comincia a prendere corpo l'idea della matematica come risultato di un processo di astrazione operato dall'uomo: la matematica non inerisce alla “essenza” delle cose ma ne rappresenta una qualità secondaria. I numeri, per Aristotele, sono nostre estrapolazioni dalle cose, esistono solo in quanto nostre astrazioni. Grazie ad Aristotele viene stabilito il legame tra matematica e logica: i principi logici del pensiero (identità, non contraddizione, terzo escluso) sono posti alla base del ragionamento filosofico e matematico. La tesi che “il mondo è

matematico” sarà però ripresa e confermata da due tra i più grandi matematici-filosofi della storia del pensiero, entrambi del Seicento: **Galileo Galilei** e **Renato Cartesio**. Per Galilei il libro dell’universo è scritto in caratteri matematici, la matematica è un linguaggio universale-divino; Cartesio fonda tutta la sua filosofia dell’evidenza delle verità matematiche sul fatto che Dio ha deciso, con atto libero, di dare al mondo un carattere matematico non più modificabile e che le leggi matematiche richiamano verità assolute ed eterne. Anche per l’altro genio filosofico-matematico del Seicento, il tedesco **Gottfried Leibniz**, le verità matematiche sono certe, eterne e fondate sulla logica; egli propose infatti *l’aritmetizzazione della logica*, cioè una logica universalmente valida basata sul calcolo. Logica e matematica rappresentano, per Leibniz, la base per la costruzione razionale di tutto il sapere. Scrisse: «*quando sorgeranno controversie fra due filosofi, non sarà più necessaria una discussione, come non lo è fra due calcolatori. Sarà sufficiente, infatti, che essi prendano in mano le penne, si siedano di fronte agli abachi e si dicano l’un l’altro: Calculemus!*». È l’atto di nascita del pensiero che poi darà vita all’Intelligenza Artificiale.

Il grande filosofo tedesco **Immanuel Kant** risponderà ai nostri quesiti in una maniera geniale, che coniuga invenzione e scoperta. La matematica da un lato è una conoscenza oggettiva e rappresenta una verità universale, ma deve questa sua universalità non al fatto di essere nelle cose o in un fantomatico mondo di idee, ma al fatto di essere, per così dire, nel cervello degli uomini (*categorie*) e dipendere dalle condizioni oggettive in cui gli uomini conoscono (*spazio e tempo*). Gli uomini rappresentano il mondo in maniera matematica perché obbediscono al modo con cui è strutturato il loro processo di conoscenza, che però, che non consente di cogliere la verità in sé (*cosa in sé*) ma solo di interpretare la realtà (*fenomeno*) con lo strumento, potente ma limitato, di cui dispongono: *l’intelletto*.

A metà Ottocento s’avvertì l’esigenza di dare un fondamento teorico solido alla matematica, che fu realizzato nei primi decenni del Novecento. Il matematico **Karl Weierstrass** pose le basi per la *teoria dei numeri reali*, sviluppata da **Georg Cantor** e **Richard Dedekind** come *teoria degli insiemi*. Il matematico **Gottlob Frege** e il

filosofo **Bertrand Russell** dettero vita al progetto teorico denominato **logicismo**: dimostrare che la matematica potesse essere ricondotta alla logica. Il matematico tedesco **David Hilbert** cercò di dimostrare la coerenza interna (consistenza) della matematica, intesa come **sistema assiomatico** che manipola simboli in base a regole (**formalismo matematico**). Sia il progetto logicista che quello formalista furono messi in crisi dalle scoperte dello stesso Bertrand Russell e del logico austriaco **Kurt Gödel**. Alcuni paradossi individuati da Russell resero problematica l'idea di ricondurre la matematica ad un sistema logico coerente. Gödel dimostrò che un sistema formale non può dimostrare la sua coerenza a partire da sé stesso. Un sistema formale quindi, per essere consistente (coerente) deve far ricorso a proposizioni esterne al sistema stesso. Questo vuol dire che un sistema logico-formale non può essere contemporaneamente completo e consistente. I problemi sollevati dalle analisi di Russell e Gödel dettero vita a quella che la storia della matematica definisce **crisi dei fondamenti**.

Pur consapevoli dei limiti con i quali ci siamo approcciati a queste nozioni di filosofia e storia della matematica, possiamo dire che abbiamo avuto la possibilità di intravedere una dimensione nuova, relativa ai legami tra matematica e storia del pensiero in generale. Per quanto riguarda le domande poste all'inizio, ci siamo resi conto della loro complessità; ad esse, infatti, i filosofi ed i matematici hanno dato nel corso del tempo risposte diverse e, a volte, contrastanti. Chiudiamo quindi con le parole di alcuni autorevoli studiosi, che rispondono diversamente al quesito sulla natura della matematica (scoperta o invenzione?). La tesi che intende la matematica come una sorta di trama che sorregge "il mondo" è ben espressa da questo brano del matematico e astrofisico John D. Barrow: "*Che si tratti dello studio delle più piccole particelle elementari della materia o delle indagini sul più lontano spazio intergalattico, le descrizioni matematiche ... sembrano averci fornito la chiave che schiude i segreti dell'Universo*" (Barrow, 2004, pp. 15-16). E sulla stessa lunghezza d'onda si pone il matematico britannico Godfrey Hardy: "*Credo che la realtà matematica sia fuori di noi, che il nostro compito sia di scoprirla o osservarla, e che*

i teoremi che noi dimostriamo, qualificandoli pomposamente come nostre creazioni, siano semplicemente annotazioni delle nostre osservazioni” (cfr. Zellini, 2016, pp. 159-160). A queste tesi contrapponiamo un passo del matematico Umberto Bottazzini: *“Le più recenti scoperte sembrano annunciare che **la credenza in una matematica platonica che trascende i corpi e le menti umane e struttura il nostro universo** ... appare sempre più destinata ad essere **relegata a materia di fede**, non dissimile dalla fede religiosa”* (Bottazzini, 2015, p. 190).

In classe abbiamo letto brani tratti dai seguenti testi:

Barrow G. D., (2004), *Perché il mondo è matematico*, Bari, Laterza.

Bottazzini U., (2015), *Numeri*, Bologna, il Mulino.

Geymonat L., (1971), *Storia del pensiero filosofico*, voll. 1-3, Milano, Garzanti.

Zellini P., (2016), *La matematica degli dei e gli algoritmi degli uomini*, Milano, Adelphi.

Il taglio di Dedekind

a cura di
Ciro Di Leva della 4° I
coordinato dalla Prof.ssa Rosa Tullio

L'articolo riproduce l'intervento dello studente alla manifestazione "Giornata Internazionale della Matematica", tenutasi il 17 marzo 2025 all'ITI Ferraris di Napoli, organizzato dall'Associazione Mathesis Napoli "A. Morelli e S. Rao", in collaborazione con l'Accademia Napoletana di Filosofia delle Scienze Umane "R. Caccioppoli" (ANFSU) e l'Associazione per l'Insegnamento della Fisica ETS Sezione di Napoli, dedicata alla memoria del Prof. Salvatore Rao. Questo lavoro vuole essere un punto di partenza per la trattazione dei "tagli di Dedekind" utili per "riempire i buchi" dei numeri razionali e dare così una definizione rigorosa di numeri irrazionali.

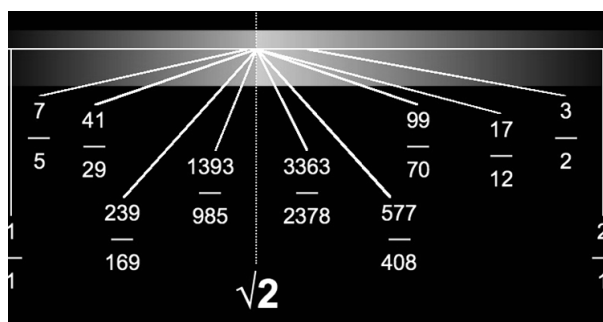
Il taglio di Dedekind

Dedekind era un matematico tedesco, nato nel 1831. Studiò la natura dei numeri reali e definì il concetto di continuità. Egli introdusse il "taglio" per colmare i vuoti nella retta numerica. Dedekind è noto per aver formalizzato il concetto di numeri reali attraverso quello che oggi chiamiamo "taglio di Dedekind".

I tagli di Dedekind sono quindi un metodo per costruire i numeri reali a partire dai numeri razionali. Grazie ai tagli di Dedekind, possiamo costruire tutti i numeri reali utilizzando solo i numeri razionali, creando un collegamento tra questi due insiemi numerici.

Un taglio di Dedekind divide i numeri razionali in due gruppi, A e B, in modo che tutti gli elementi di A siano minori di tutti gli elementi di B. Il punto in cui avviene il taglio

si chiama C. Se B ha un elemento minimo, allora il taglio rappresenta un numero razionale. A non ha un elemento massimo. Ad esempio, se facciamo il taglio a 2, tutto ciò che è minore di 2 è in A e tutto ciò che è maggiore o uguale a 2 è in B. In questo caso, il numero 2 è il punto del taglio. Se B non ha un elemento minimo, il taglio rappresenta un numero irrazionale. Ad esempio, prendiamo la radice quadrata di 2. Possiamo avvicinarci sempre di più a questo numero con frazioni come, $3/2$, $7/4$, ma senza mai raggiungerlo. In questo caso, il taglio rappresenta $\sqrt{2}$.



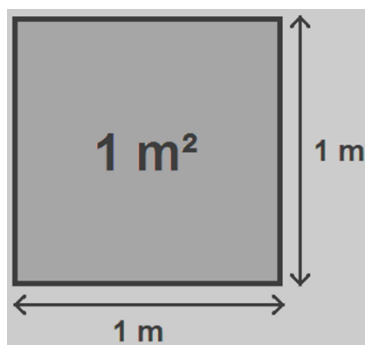
Immaginiamo di prendere l'insieme di numeri razionali e di dividerlo in due sottoinsiemi disgiunti. Se esistesse un numero razionale capace di separare i due insiemi la situazione sarebbe semplice. Ma cosa succede se tale numero non esiste? Dedekind suggerì di identificare un nuovo numero reale che corrisponde al punto di separazione, colmando così i “buchi” nei numeri razionali e permettendo così una costruzione rigorosa dei numeri reali.



I numeri irrazionali come $\sqrt{2}$ non possono essere scritti come frazioni. Ippaso di Metaponto scoprì questa proprietà, causando una crisi nella matematica antica. Dedekind, nel XIX secolo, trovò una soluzione rigorosa con il suo “taglio”. Il taglio di Dedekind è la soluzione del problema di Ippaso.

Esempio: il “metro quadrato”

Il “metro quadrato” non è altro che, banalmente, un quadrato con lato di un metro. La sua diagonale, secondo il Teorema di Pitagora, avrà lunghezza pari alla radice quadrata di 2 metri. $\sqrt{2}$ è irrazionale, e ciò dimostra che esistono grandezze misurabili che non possono essere espresse con rapporti di numeri interi.



Consideriamo il numero $\sqrt{2}$ sulla retta numerica: tutte le frazioni minori di $\sqrt{2}$ formano un insieme (es. 1, 1.4, 1.41, ...). Tutte le frazioni maggiori formano un altro insieme (es. 1.5, 1.42, ...). Il numero $\sqrt{2}$ è il “taglio” che separa i due gruppi.

Il taglio di Dedekind, pilastro fondamentale per l’analisi matematica moderna

I numeri razionali (frazioni) non coprono tutti i punti della retta numerica. Esistono numeri che non si possono esprimere come frazioni (es. $\sqrt{2}$). Serve un metodo rigoroso per definirli e inserirli nella retta reale. Il taglio di Dedekind ha risolto il problema della continuità della retta numerica. Ha permesso di trattare i numeri irrazionali in modo rigoroso ed è quindi un pilastro fondamentale per l’analisi matematica moderna.

Praga e Kafka: un viaggio nell'anima della città magica

*a cura di
Raffaele Musella della classe 5° P
coordinato dalla professoressa Orsolina De Mase*

L'indissolubile intreccio tra la capitale boema ed uno degli scrittori più rappresentativi del Novecento letterario europeo. Emozioni e riflessioni di uno studente del Ferraris, suscitate dalla visita didattica alla città di Praga, che ha coinvolto, tra marzo e aprile di quest'anno, tutte le classi quinte dell'Istituto. Il testo si chiude con la poesia "Un legame fatto di silenzi".

Praga: una città sospesa nel tempo

Praga non è solo una delle capitali europee più affascinanti, con il suo castello gotico, le guglie delle chiese barocche e il fascino decadente delle sue strade acciottolate, è anche – e forse soprattutto – la città di Franz Kafka. Il legame tra lo scrittore e la capitale ceca non è solo geografico, ma profondamente esistenziale. Camminare per Praga significa, in un certo senso, attraversare le pagine di Kafka.

Situata sulle rive della Moldava, Praga ha il raro dono di saper mescolare epoche e stili in un'armonia quasi irreale. Dalla maestosità del Castello di Praga al misterioso orologio astronomico nella Piazza della Città Vecchia, ogni angolo sembra custodire un segreto. Non è un caso che proprio qui si siano sviluppati miti, leggende e racconti che sfumano tra sogno e realtà. Questo alone di mistero e di bellezza tormentata è anche il respiro che anima la scrittura kafkiana.

Kafka: lo scrittore dell'angoscia moderna

Franz Kafka nasce a Praga nel 1883, in una famiglia ebrea di lingua tedesca. La sua vita, segnata da un rapporto conflittuale con il padre, una salute fragile e un senso di alienazione profondo, si riflette nella sua opera letteraria, divenuta simbolo dell'uomo moderno di fronte a un mondo incomprensibile. Opere come *La metamorfosi*, *Il processo* e *Il castello*, esplorano tematiche di isolamento, colpa e burocrazia opprimente, in scenari che sembrano spesso ispirati dall'architettura e dall'atmosfera praghese. I vicoli tortuosi della città vecchia, le torri scure, la nebbia che si alza al mattino: tutto contribuisce a creare un paesaggio mentale e fisico che riecheggia nelle sue pagine.

Per chi desidera conoscere Kafka attraverso la città, ci sono luoghi imprescindibili: la casa natale, situata nei pressi della Chiesa di San Nicola, è oggi segnalata da una targa commemorativa; il Museo Franz Kafka, sulle rive della Moldava, a Malá Strana, offre un'esperienza immersiva tra manoscritti, fotografie e installazioni ispirate al suo universo letterario; il Quartiere Ebraico (Josefov), dove Kafka trascorse gran parte della sua vita, tra sinagoghe e l'antico cimitero ebraico che ancora oggi conservano un'aura di mistero; **la celebre statua di Kafka**: realizzata da Jaroslav Róna, raffigura lo scrittore in cima a una figura vuota e anonima, un'immagine potente e simbolica; infine, tra altre statue di Kafka a Praga troviamo la singolare testa rotante.



Kafka e l'eredità invisibile

Kafka scrisse in tedesco, ma è diventato una delle icone culturali della Repubblica Ceca. Anche se in vita fu quasi sconosciuto e desiderava che le sue opere fossero distrutte, oggi il suo nome è legato indissolubilmente a Praga. La sua figura aleggia silenziosa tra le pietre antiche della città, come un'ombra che osserva e riflette, sempre attuale, sempre enigmatica. Praga e Kafka sono due lati dello stesso mistero: la città che nasconde e rivela, lo scrittore che parla all'inconscio di tutti noi. Visitare Praga non è solo un'esperienza turistica, ma un viaggio dentro l'assurdo, la bellezza e la fragilità della condizione umana.

Un legame fatto di silenzi

Kafka non ha scritto su Praga.

L'ha scritta con Praga.

Come si scrive con l'inchiostro della nebbia,

o con la voce che si rompe prima di diventare parola.

La sua opera è un sussurro dentro le pietre della città,

un sussulto nei portoni chiusi,

una domanda senza risposta nei vicoli che non portano da nessuna parte.

Praga è Kafka.

Kafka è Praga.

E forse nessuno dei due è reale, ma entrambi ti seguono quando ti allontani,

come un sogno che non riesci più a ricordare ma che sai di aver fatto.

Una mattinata nella storia della nostra città: il “Ferraris” in visita a *Il Mattino*

a cura di

*Raffaele Iannone, Domenico Iavarone, Gennaro Ratti della classe 5° C
coordinati dalle prof.sse Gioia Capolongo e Maria Lento*

*L'articolo riproduce il resoconto della visita alla redazione de *Il Mattino* nella nuova sede che, dal 2018, ospita la storica testata cittadina. Le riflessioni degli studenti della 5° C del Ferraris, sullo sfondo della Napoli del futuro.*

Il Galileo Ferraris in visita a *Il Mattino*

Quest'anno scolastico, con l'associazione *Vivo a Napoli* e con le nostre insegnanti, il nostro istituto sta realizzando un progetto volto alla conoscenza della Napoli di fine Ottocento, con un approfondimento su Matilde Serao e la sua attività di scrittrice, giornalista e fondatrice di giornali. Ecco perché, il giorno due aprile noi, ragazzi della quinta C, ci siamo recati al Centro Direzionale di Napoli alla sede della redazione de *Il Mattino*, accompagnati dalla nostra preside, la prof.ssa Daniela Conte, e dalle nostre docenti Maria Lento e Gioia Capolongo.

La giornata prometteva bene, c'erano un bel sole sulle nostre teste e un vento poderoso, ma caldo ad accompagnare il nostro arrivo al grattacielo. Il CDN è una costruzione molto particolare, voluta dal Comune di Napoli, negli anni sessanta, per riqualificare una zona industriale dismessa a ridosso della stazione centrale e soprattutto per decongestionare il traffico nel centro storico cittadino.

È stato progettato da un architetto giapponese, Kenzo Tange, e per la realizzazione dei suoi grattacieli hanno concorso alcuni tra i più celebri architetti italiani. È la nostra city, il simbolo della rinascita economica della Napoli degli anni '80. Ma è anche l'ennesima

faccia di questa città multiforme, che non è mai uguale a sé stessa e che, a seconda dei quartieri, assume forme, lingue e caratteristiche diverse.

Appena arrivati nell'atrio del palazzo abbiamo scorto l'antica rotativa che un tempo svolgeva con onore il suo lavoro a via Chiatamone. Siamo rimasti subito attratti da questo cimelio, del resto non si può non rimanerne affascinati. Prima di salire a destinazione la simpatica guardia giurata, posta a custodia del palazzo, ci ha fatto un po' da Cicerone, come spetta alla lunga tradizione dei custodi, ci ha posto tutte le domande di rito e quindi ci ha indicato gli ascensori che ci avrebbero portato al piano d'interesse: trentatreesimo per l'esattezza.

Giunti alla meta siamo stati accolti dal caporedattore de Il Mattino e dalla segretaria del direttore. Ci hanno permesso di lasciare soprabiti e zaini in un'anticamera e poi ci siamo diretti all'interno della redazione. È un luogo magico, moderno e contemporaneo, con una vista mozzafiato sulla città. Da quell'altezza si ha la sensazione di essere in aereo e la città sembra piccolissima, mentre il Vesuvio incombe in tutta la sua possanza. Sulle pareti giganteggiavano le prime pagine più significative del quotidiano: dalla storica prima pagina del giornale, a quella dello sbarco sulla luna, da quella del terremoto dell'80 allo scudetto del Napoli.

Abbiamo poi conosciuto alcuni redattori che ci hanno illustrato come si riporta una notizia e ci siamo confrontati con due giovani stagisti del giornale, aspiranti giornalisti, che ci hanno raccontato la loro esperienza. Dopo l'intervento del direttore Roberto Napoletano la nostra visita è giunta al termine. Ci è dispiaciuto lasciare quel luogo magico, quegli uffici che davano una dimensione internazionale alla nostra realtà cittadina.

Che rimane di questa avventura? La testa ed il cuore pieni di cose nuove e interessanti. La voglia di poter lavorare in questo mondo e la carta sdrucita di una merendina comprata nel distributore della redazione. La conserveremo a memoria di questa splendida mattinata.

L'informatica al servizio della matematica

a cura di

Ciro Strazzullo, Martina Ercole, Fabio Cuomo, Alfredo Cesarano della classe 3° T
coordinati dai proff. Francesca Carleo, Angelo Rosano

L'articolo riproduce l'intervento degli studenti alla manifestazione "Giornata Internazionale della Matematica" del 17 marzo 2025. Gli studenti illustrano lo sviluppo di una semplice app calcolatrice in Android Studio, un ambiente di sviluppo integrato (IDE) progettato specificamente per la creazione di applicazioni Android, la cui struttura modulare consente lo sviluppo anche di progetti complessi. Vengono introdotte alcune riflessioni sul rapporto intelligenza artificiale-umana che saranno oggetto di un lavoro interdisciplinare che vedrà il coinvolgimento dell'intero triennio del corso T del Ferraris.

Il rapporto tra mente e macchina

L'Intelligenza Artificiale (IA) rappresenta uno degli ambiti più affascinanti e complessi dell'informatica moderna. Fin dagli albori del pensiero computazionale, filosofi e scienziati hanno esplorato il rapporto tra mente e macchina, cercando punti di contatto tra scienze matematiche, fisiche e umane. Questo articolo si propone di esaminare lo sviluppo di una semplice app calcolatrice in Android Studio, evidenziando come l'uso della tecnologia possa migliorare le capacità cognitive dell'uomo e potenzialmente ampliarne l'intelligenza.

Cos'è Android Studio?

Android Studio è un ambiente di sviluppo integrato (IDE) progettato specificamente per la creazione di applicazioni Android. Basato su IntelliJ IDEA, offre strumenti avanzati per il design dell'interfaccia utente, il debugging e il testing delle applicazioni.

La sua struttura modulare consente di organizzare il codice in modo efficiente, facilitando lo sviluppo anche di progetti complessi.

Interfaccia Logica ed Utente

L'app calcolatrice è sviluppata in Java, un linguaggio di programmazione ad alto livello orientato agli oggetti, e utilizza XML per la definizione dell'interfaccia utente. Quest'ultima comprende pulsanti per l'inserimento dei numeri e delle operazioni, oltre a un display per mostrare i risultati.

La logica dell'applicazione è gestita tramite codice Java, che consente l'esecuzione delle operazioni matematiche e la gestione dell'input utente. Le principali funzioni implementate sono:

- **Percentuale:** calcola la percentuale di un numero rispetto a un valore memorizzato e aggiorna il display.
- **Reset:** azzera i valori temporanei e imposta il display su "0".
- **Cancella Ultimo:** rimuove l'ultima cifra inserita, mostrando "0" se l'input diventa vuoto.

Questa suddivisione tra logica e interfaccia rispecchia il paradigma MVC (Model-View-Controller), garantendo modularità e facilità di manutenzione.

Benefici della Calcolatrice

L'informatica ha rivoluzionato il modo in cui affrontiamo i calcoli matematici, rendendoli più accessibili e precisi. L'automazione dei calcoli permette di ridurre significativamente il tempo necessario per eseguire operazioni complesse, aumentando così l'efficienza. Inoltre, l'uso di software minimizza gli errori dei calcoli manuali, garantendo risultati più affidabili.

Le applicazioni digitali come la calcolatrice sviluppata in Android Studio offrono anche una maggiore accessibilità. Chiunque può utilizzare strumenti interattivi che facilitano lo studio e l'apprendimento della matematica. In un contesto più ampio, il progresso dell'IA e dello sviluppo software può essere visto come un'estensione

naturale delle capacità cognitive dell'uomo, capace di supportare e potenziare l'intelligenza umana stessa.

La tecnologia contribuisce al progresso umano

Lo sviluppo di applicazioni come una semplice calcolatrice in Android Studio non è solo un esercizio tecnico ma anche un'opportunità per riflettere su come la tecnologia possa contribuire al progresso umano. La capacità di creare strumenti sempre più avanzati e accessibili ci pone di fronte alla sfida di integrare l'Intelligenza Artificiale con l'Intelligenza Umana, unendo scienze matematiche, fisiche e umane in un dialogo continuo e costruttivo.

L'economia da una nuova prospettiva: l'Econofisica

a cura di

Vittorio Marra della classe 5 H

coordinato dalla prof.ssa Alessandra Rotunno

Fisica ed Economia sono due materie accomunate dallo studio di sistemi complessi a molteplici variabili, che si tratti di molecole di gas libere di muoversi nello spazio o dei mercati finanziari di Wall Street. È però recente l'idea di studiare la seconda con i metodi della prima: ciò ha portato alla nascita di una materia chiamata econofisica. Nell'articolo si analizzeranno gli aspetti più interessanti di questa materia, il perché di certe comparazioni tra i due mondi e la loro efficacia. Si partirà dalle similitudini tra i grandi corpi celesti che si muovono nello spazio e le grandi concentrazioni di denaro. Si continuerà poi parlando dello studio della volatilità intrinseca ai mercati finanziari vista come entropia di un sistema complesso e si tratteranno di conseguenza i metodi del calcolo stocastico. Si concluderà con il paragone tra due fenomeni tanto potenti quanto imprevedibili: i terremoti e i crash del mercato.

La nascita dell'Econofisica

Molti non si aspetterebbero che le banche riservino circa il 30% dei loro posti di lavoro a laureati in Fisica, Matematica o affini, questo perché si parla di corsi di studi in cui non vi è traccia di insegnamenti che riguardino direttamente economia o finanza. Eppure basta pensare in maniera laterale per incominciare a vedere nelle fluttuazioni, nei crolli e nei picchi degli indici della *Borsa di Wall Street* i movimenti di un *sistema complesso*, caratterizzato da un alto numero di variabili, non dissimile ad un alto numero di particelle che si muovono in uno spazio dove le condizioni di temperatura e pressione cambiano di continuo o ad un sistema di corpi celesti le cui orbite sono reciprocamente influenzate dai campi gravitazionali di ognuno.

Da queste comparazioni nasce negli anni '90 del secolo scorso la disciplina chiamata *Econofisica* che si propone proprio di studiare i fenomeni economico-finanziari con un approccio derivato dalla fisica. Il termine fu coniato da H. Eugene Stanley, fisico

statunitense, in una sua conferenza in India. Da quel momento questa innovativa metodologia incontrò vari sostenitori, come molte critiche.

In realtà, seguendo lo spirito di Stanley, il mondo fisico offre diversi insegnamenti per comprendere meglio quello del denaro e dei mercati, con lo scopo non di rivoluzionare secoli di teorie economiche, ma piuttosto di celebrare l'importanza della interdisciplinarietà e di riflettere sul bisogno di vedere sempre le cose da altre prospettive.

Dinamica celeste & dinamiche di mercato

Non c'è dubbio su quali siano le entità alla base di un sistema dinamico in fisica e di un sistema economico: massa e denaro. Dalla comparazione tra i meccanismi che regolano questi due concetti si ricavano interessanti similitudini.

Per prima cosa, grazie alla *Legge di Newton*, sappiamo che masse particolarmente grandi generano un *campo gravitazionale* che attrae altre masse.

$$F=GmMr^2$$

Infatti, in economia, grandi capitali attraggono ancora più capitale, e questo lo vediamo a vari livelli: prendendo ad esempio il nostro paese, le grandi città attraggono persone, quindi forza lavoro e conseguentemente denaro, dalle province; e ancora le città del Nord, maggiormente industrializzate, attraggono lavoratori dal Sud. Ci sono poi le grandi aziende e multinazionali che spesso inglobano realtà più piccole dello stesso settore per aumentare la loro capillarità sul territorio. Comportamento simile hanno anche le banche che puntano a comprare quote di altri istituti per avere un dominio sempre più esteso. Si arriva a parlare di un vero e proprio *risiko bancario*, di cui abbiamo avuto un recente esempio a livello europeo. Gli esiti di queste reciproche influenze sono assai difficili da prevedere: in fisica è ben noto il *problema dei tre corpi*, ovvero l'estrema difficoltà di calcolo delle traiettorie di tre corpi influenzati dalle reciproche attrazioni gravitazionali.

Quando si parla industrie o aziende che ne acquisiscono altre bisogna stare attenti ad un pericolo che incombe su ogni sistema economico: quando due o più masse molto

grandi si attraggono l'un l'altra, fino a formare una sola entità, viene a crearsi un *buco nero*, un corpo celeste che non lascia sfuggire niente al suo campo gravitazionale, nemmeno la luce. Il suo corrispettivo economico è il *monopolio*. Un monopolio si forma quando tutte le realtà operanti in un determinato settore vengono cancellate in favore di una sola o inglobate in essa. In questa maniera si uccide la concorrenza, che sta alla base del liberalismo, e l'azienda col monopolio può liberamente dettar legge sul prodotto o sul servizio venduto, in termini di prezzi e politiche adottate. I governi, per salvaguardare l'economia adottano una serie di misure per scongiurare che ciò possa accadere, come le *leggi Antitrust*.

Movimenti (quasi) casuali: particelle e finanza

Il *calcolo stocastico* è un metodo matematico per estendere il calcolo differenziale a processi casuali. In fisica si usa molto per studiare il moto di corpi estremamente piccoli, come polveri o particelle, in un fluido. Ma questi strumenti si adattano benissimo anche all'analisi dei *mercati finanziari* che, per loro natura, anche se nel lungo periodo tendono a seguire il contesto macroeconomico di riferimento, nel breve termine sono estremamente volatili. Ci sono, ovvero, così tante variabili in gioco (il volume di acquisti e vendite operate in un certo istante, le notizie del momento, l'andamento dei prezzi di altri titoli correlati) che è impossibile determinarne il movimento tramite una legge matematica specifica. Inoltre, è da ricordare che ogni *asset* finanziario, ovvero ogni titolo scambiabile in borsa, ha un suo rischio: di solito, una *volatilità* più alta sui mercati si traduce anche in un maggiore rischio, questo significa che il titolo può salire velocemente di prezzo così come scendere. Vediamo quindi degli esempi di come si analizzano contesti così complessi:

- Il *moto browniano* è un processo stocastico continuo che rappresenta un movimento completamente casuale. È definito da questa legge:

$$B_{t+\Delta t} - B_t \sim N(0, \Delta t)$$

che significa che in qualsiasi istante la variazione nel moto in un certo intervallo di tempo Δt è distribuito come una *normale* che ha *centro* in 0 e *varianza* Δt . Quindi il

moto non ha direzione preferenziale, essendo casuale, e tenderà ad oscillare intorno al punto 0. Tale moto è usato appunto per studiare le variazioni di prezzo di vari asset, dove ad oscillazioni ampie corrisponde alto rischio. Un esempio di applicazione è il *Modello Black-Scholes*, che serve a determinare il prezzo delle *opzioni* studiando quello delle azioni relative. Le opzioni sono strumenti derivati che, a fronte di un pagamento non recuperabile, permettono di acquistare un determinato asset (chiamato *sottostante*) solo se l'investitore decide di farlo, cioè se ne riceve profitto. Il modello assume che i prezzi $S(t)$ delle azioni usate come sottostante seguano questa legge:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB(t)$$

dove μ e σ rappresentano rispettivamente il *termine deterministico*, ovvero l'andamento medio, e l'*ampiezza* della componente casuale, ovvero la volatilità, mentre $B(t)$ è il moto browniano.

Le equazioni differenziali stocastiche, in breve, SDE, riescono a descrivere lo sviluppo $X(t)$ di una variabile nel tempo incorporando anche la componente casuale ed hanno forma generale del tipo:

$$dX_t = \mu_t X_t dt + \sigma_t X_t dB(t)$$

con μ , σ e $B(t)$ definiti come prima.

Un esempio di applicazione è lo studio dei tassi di interesse, ovvero, quelle percentuali da restituire su di un debito contratto con una banca, decisi di volta in volta dalle *Banche Centrali* in relazione all'andamento dell'economia. Per modellizzare proprio l'andamento $r(t)$ nel breve termine di questi tassi si usa il *Modello di Vasicek*:

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma dB(t)$$

in cui b è il *target* di lungo periodo, cioè il valore che devono assumere i tassi nel lungo tempo, mentre a è la velocità di regressione alla media.

Ci sono poi strumenti finanziari complessi al punto che cercare equazioni per descriverli è inutile. È qui che intervengono le *simulazioni di Monte Carlo*, che generano numeri casuali entro certi parametri per studiare le possibili aspettative riguardo un titolo finanziario.

Terribili imprevisti: terremoti e crash di mercato

Sia in fisica che in finanza abbiamo esempi di eventi inaspettati, più o meno pericolosi, talvolta disastrosi: i terremoti e i *crash di mercato*.

Andiamo prima di tutto alla loro origine. I terremoti si originano da accumuli di energia sotterranea, dovuta ad attività geologiche di vario genere, la quale viene rilasciata improvvisamente. Si applica un concetto simile anche ai crolli delle borse quando tensioni geopolitiche o paure degli investitori si riversano sui mercati. I crash possono però avvenire anche a causa dello scoppio delle cosiddette *bolle speculative*, ovvero prezzi gonfiati di aziende o interi settori che generano grandi aspettative da parte degli investitori, che vengono poi deluse. Questi eventi sono altamente imprevedibili, si può solo parlare di *zone* statisticamente più colpite: le zone sismiche per i terremoti, come purtroppo la nostra Italia, e i settori particolarmente rischiosi e volatili, come quello delle nuove tecnologie o delle *criptovalute*.

Data la loro imprevedibilità, restano due consigli che si possono mutuare dalla fisica alla finanza in questo caso.

Il primo: sono eventi molto rari. Terremoti attorno al grado 7, reputati estremamente distruttivi, e crash di mercato di oltre il 50% dei prezzi sono infatti accomunati da una cadenza di circa uno ogni 20 anni.

Il secondo: c'è possibilità di prevenzione. Come i moderni edifici sono antisismici, così, con una strategia bilanciata e una corretta gestione del rischio, si può costruire un portafoglio di titoli che regga, o almeno attutisca, gli effetti di una crisi.

Ma il teorema di Pitagora è davvero di Pitagora?

*a cura di
Micaela Piscopo
coordinata dalla prof.ssa Emilia Santoro*

È molto difficile, se non impossibile risalire all'origine delle idee matematiche. Probabilmente perché non sono quasi mai scaturite da una sola persona e neanche da un'unica civiltà, ma sono il frutto di lavori che a volte nascono in contesti diversi, e si arricchiscono via via con il contributo di più persone, talora anche in tempi diversi e diventano sempre più rigorose in funzione dei nuovi strumenti messi a disposizione dalla scienza.

In merito al teorema che tutti conosciamo come teorema di Pitagora e che siamo soliti attribuire proprio a Pitagora, sembra che solo i pitagorici lo attribuissero al maestro.

Si racconta che Pitagora abbia intuito il teorema mentre aspettava di essere ricevuto da Policrate, il tiranno di Samo, seduto in un grande salone. Durante l'attesa il suo pensiero si concentrò sulle piastrelle del pavimento che erano quadrate: pensò che, se avesse tagliato ciascuna mattonella lungo la diagonale, avrebbe ottenuto due triangoli rettangoli uguali e che l'area del quadrato costruito sull'ipotenusa di ciascuno di questi triangoli sarebbe stata il doppio dell'area della mattonella. Infatti, osservando 4 piastrelle adiacenti come in fig. 1, tale quadrato sarebbe stato composto da 4 mezze piastrelle, dunque da 2 piastrelle intere.

L'area di ogni quadrato costruito invece su uno dei cateti era uguale all'area di un'intera mattonella.

Dunque, l'area del quadrato costruito sull'ipotenusa risultava uguale alla somma dei due quadrati costruiti sui cateti.

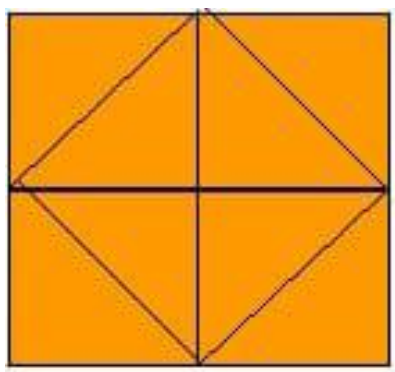


Fig 1

Queste riflessioni però erano giuste se riferite al caso di una piastrella quadrata la cui metà è un triangolo rettangolo isoscele. E se il triangolo rettangolo non fosse stato isoscele? Pitagora intuì che la proprietà potesse essere ancora valida e, siccome l'attesa si faceva ancora lunga, si mise al lavoro.

Lui pensò che il quadrato formato da 4 piastrelle si potesse scomporre in 4 triangoli rettangoli equivalenti e un quadrato avente come lato l'ipotenusa di uno dei triangoli (fig. 2) e studiando tale figura non fu difficile passare al caso generale di un triangolo rettangolo qualsiasi.

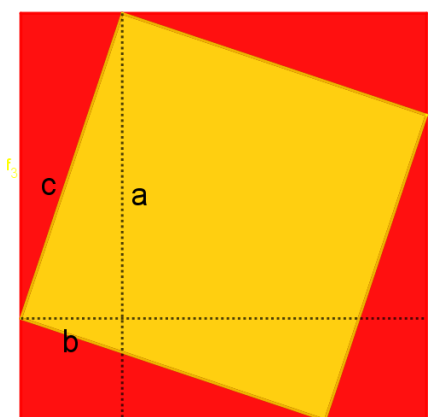


Fig. 2

Se infatti si indicano con a , b le lunghezze dei cateti e con c la lunghezza dell'ipotenusa di ciascuno dei 4 triangoli si ottiene:

$$A(Q \text{ sull'ipotenusa}) = A(\text{Quadrato grande}) - 4 A(\text{triangolo rettangolo})$$

$$A(Q \text{ sull'ipotenusa}) = (a+b)^2 - 4 \frac{ab}{2} = a^2 + b^2 + 2ab - 2ab = a^2 + b^2 \text{ cioè}$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Per lungo tempo il teorema di Pitagora fu detto “il ponte degli asini”, cioè un ponte che riusciva a superare solo chi avesse attitudine al pensiero astratto e al metodo deduttivo e fosse quindi in grado di comprendere i procedimenti matematici proposti dai pitagorici.

In realtà le origini del teorema risalgono ad almeno un migliaio di anni prima.

La prima testimonianza nota intorno al teorema di Pitagora è contenuta in una tavoletta paleo babilonese, databile tra il 1800 e il 1600 a. C., in cui è disegnato un quadrato con le due diagonali. Sul lato del quadrato è indicato il numero 30, lungo la diagonale, si trovano 2 numeri in notazione sessagesimale che, riportati in forma decimale, danno, il primo un’ottima approssimazione della radice quadrata di 2, il secondo la misura della diagonale del quadrato di lato 30 che risulta uguale al prodotto di 30 per la radice di 2 (Fig. 3).

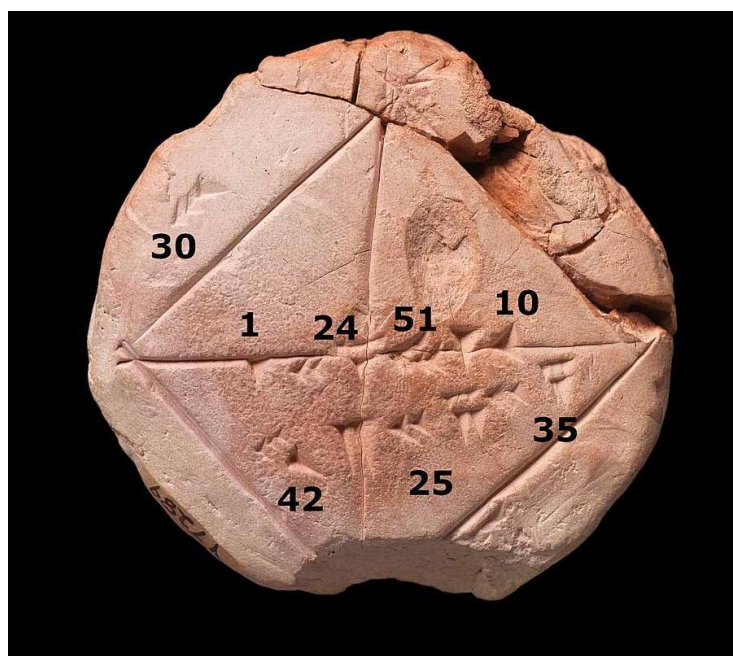


Fig. 3

Questo dimostra la conoscenza del teorema di Pitagora almeno nel caso del triangolo rettangolo isoscele.

La tavoletta è conservata negli Stati Uniti, all'Università di Yale: è considerata “un capolavoro babilonese” ed ha un importantissimo valore storico in quanto dimostra che il teorema di Pitagora era già noto almeno 1000 anni prima di Pitagora. In poche parole, il teorema di Pitagora non è di Pitagora.

Sembra che il teorema fosse noto altresì agli egiziani: si racconta che i geometri egizi, per trovare un angolo retto, si servissero di una corda con segnati tratti di lunghezza 3, 4 e 5. Tali numeri rappresentano infatti le misure dei lati di un triangolo rettangolo, ma questa testimonianza non sembra molto attendibile, piuttosto rimanderebbe all'inverso del teorema!

Ulteriori testimonianze si trovano anche in altre civiltà, ad esempio, dell'antica Cina o dell'India, ma noi siamo portati a privilegiare la civiltà greca, forse perché riconosciamo in essa le radici del nostro pensiero.

Ma la dimostrazione per eccellenza per i matematici è sicuramente quella di Euclide, riportata nella **proposizione 47** del **primo libro** degli *Elementi*:

Nei triangoli retti il quadrato del lato che sottende l'angolo retto `e uguale alla somma dei quadrati dei lati che contengono l'angolo retto.

La coda di pavone

Per dimostrare il teorema Euclide si utilizza la figura seguente (Fig. 4) che è stata battezzata, per la sua forma particolare, il mulino a vento o la **coda di pavone** o la sedia della sposa.

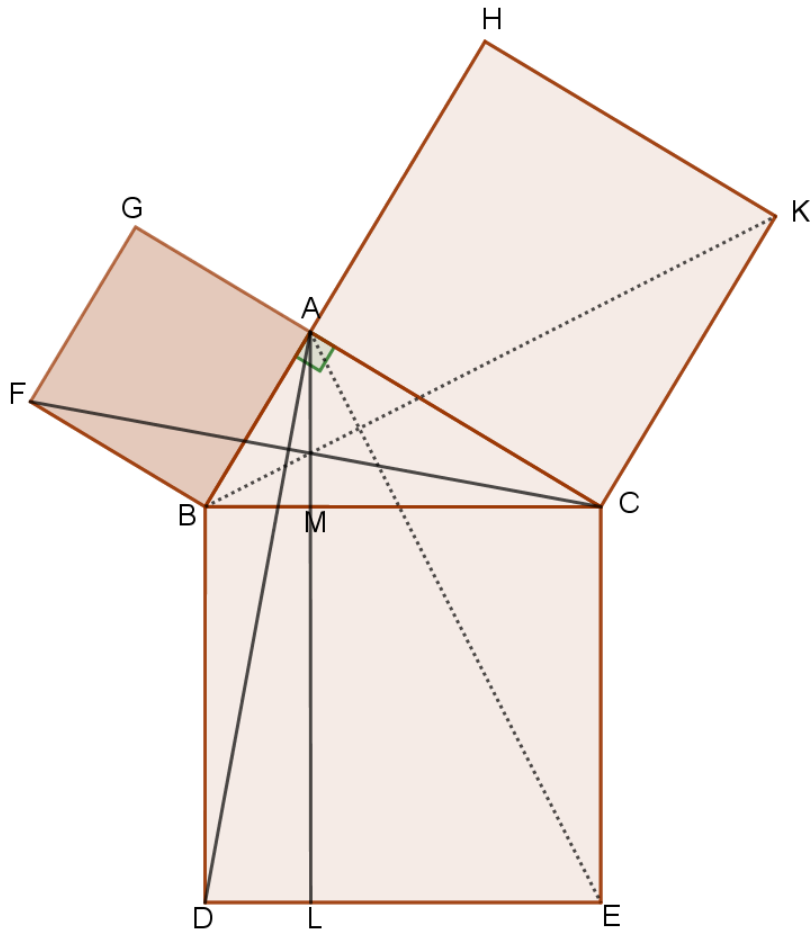


Fig. 4

Costruiti i tre quadrati sui lati del triangolo, si conduca per il punto A la perpendicolare a DE che interseca DE nel punto L.

Si congiunga A con D ed F con C.

1. Gli angoli FBC e ABD sono congruenti perché somme di angoli congruenti (entrambi somma di un angolo retto + l'angolo ABC).
2. I due triangoli FBC e ABD risultano congruenti per il primo criterio di congruenza avendo:

$$FB = AB$$

$$BC = BD$$

L'angolo FBC = all'angolo ABD (come osservato prima)

3. L'area del rettangolo BMLD è il doppio dell'area del triangolo ABD, avendo le due figure la stessa base BD e la stessa altezza (= BM)
4. L'area del quadrato AGFB è il doppio dell'area del triangolo FBC, avendo le due figure la stessa base PB e la stessa altezza (= AB)
5. Dunque, il rettangolo BMLD è equivalente al quadrato AGFB, avendo entrambi area doppia di triangoli congruenti
6. Analogamente, dopo aver congiunto A con E e B con K, si dimostra che il rettangolo MCEL è equivalente al quadrato AHKC
7. Pertanto, tutto il quadrato BDEC costruito sull'ipotenusa, somma dei rettangoli BMLD e MCEL, è equivalente alla somma dei quadrati AGFB e AHKC costruiti sui due cateti:

$$A(BDEC) = A(AGFB) + A(AHKC)$$

Una dimostrazione in poesia

Numerosissime sono le dimostrazioni di questo teorema: lo scienziato statunitense Elisha Scott Loomis ne ha classificate 371 differenti, ma il loro numero continua a crescere grazie al contributo di matematici professionisti e dilettanti da sempre affascinati dalla bellezza del teorema.

Di notevole interesse quelle di Leonardo da Vinci, del filosofo Arthur Schopenhauer, di Einstein (all'età di 12 anni).

Ma, se andiamo a curiosare fra le tante dimostrazioni, ne troviamo una veramente curiosa, trovata, a fine 800, dall'astronomo dell'osservatorio di Greenwich, George Biddel Airy. Si tratta di una dimostrazione in poesia:

I am, as you can see,

Come potete veder, son qui:

$$a^2 + b^2 - ab$$

*When two triangles on me stand,
Square of hypotenuse is plann'd
But if I stand on them instead
The squares of both sides are read.*

$$a^2 + b^2 - ab$$

*Se due triangoli sono sopra di me
Il quadrato dell'ipotenusa c'è
E se questi di sotto invece stanno
I quadrati dei cateti si hanno.*

Osserviamo la Fig. 5: denotata con **a** la misura del cateto maggiore di ognuno dei 4 triangoli rettangoli uguali, con **b** la misura del cateto minore e con **c** quella dell'ipotenusa, l'area della parte colorata in bianco risulta

$$a^2 + b^2 - ab$$

Ed è proprio la parte bianca ($a^2 + b^2 - ab$) a parlare nella poesia:

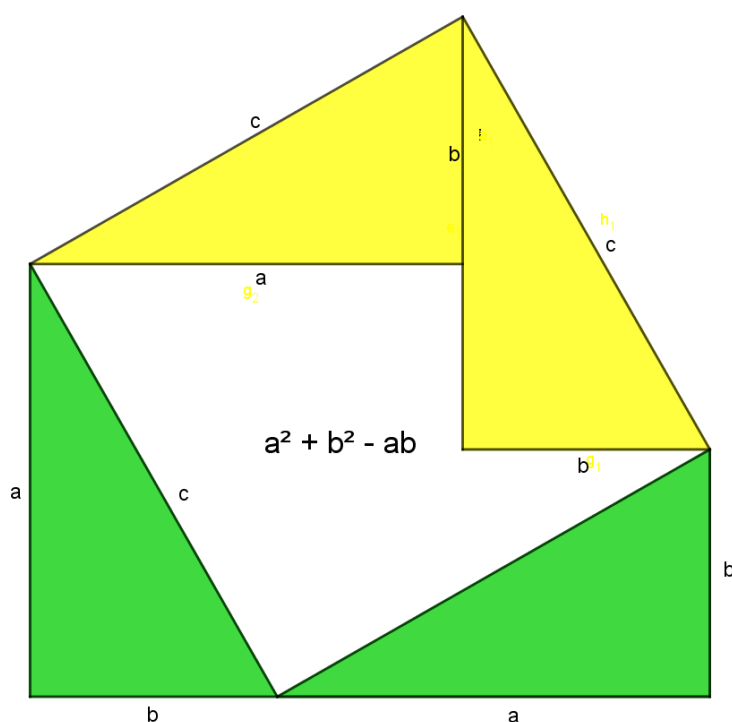


Fig. 5

Se due triangoli sono sopra di me, il quadrato dell'ipotenusa c'è.

Infatti, la parte bianca, con i due triangoli gialli, forma il quadrato dell'ipotenusa.

E se questi di sotto invece stanno i quadrati dei cateti si hanno.

Invece, la stessa parte bianca con i due triangoli verdi, equivalenti ai precedenti, forma i quadrati dei cateti.

Secondo la poesia, se 2 triangoli (gialli) sono sopra la parte bianca, si ottiene il quadrato dell'ipotenusa, di area c^2 ; se i due triangoli (verdi) stanno invece sotto la parte bianca, si ottengono i quadrati dei cateti, di aree a^2 e b^2 .

Come si evince facilmente dalla figura le due parti sono equicomposte, dunque equivalenti. Allora è:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

L'Analisi Matematica dietro il volante: quando la Matematica fa correre il mondo

a cura di

Simone Perrone e Luca Raiano

Studenti del I° anno del Corso di Laurea in Matematica

Questo articolo si prefigge l'obiettivo di destare curiosità ed interesse nel lettore verso l'Analisi Matematica trattando dapprima una parte prettamente storica e convergendo poi, senza entrare troppo nel formalismo, verso una parte più analitica, ma senza abbandonare quella precedente. Nel corso della lettura si esplorerà come l'Analisi, nata per rispondere a domande sulla natura del movimento e del cambiamento, sia oggi una parte essenziale della progettazione e dell'esperienza di guida moderna.

“La continuità è una legge suprema della natura; nulla accade per salto.”

- Gottfried Wilhelm Leibniz, "Monadologia" (1714)

"Le quantità, e i loro tassi di cambiamento, sono flussioni; e queste ultime sono come i moti continui degli enti matematici."

- Isaac Newton, "Methodus Fluxionum" (1671)

Introduzione al calcolo infinitesimale

Per parlare di Analisi Matematica, bisogna prima parlare necessariamente di calcolo infinitesimale. Il calcolo infinitesimale è stato inizialmente sviluppato nel mondo scientifico nel IV secolo e III secolo a.C. per opera di matematici noti quali Eudosso, Euclide e Archimede. Per uno sviluppo sistematico occorre attendere il XV° e XVI° secolo con gli sviluppi apportati da parte di Fermat, Barrow e Cartesio, solo per citarne

alcuni. Ma ancor più sono stati fondamentali gli avanzamenti ottenuti a cavallo tra il XVII° e XVIII° secolo da parte di Newton e Leibniz.

- **Isaac Newton** sviluppò il calcolo per descrivere fenomeni fisici, come il moto dei corpi e la gravità. Per lui, tutto ruotava attorno al tempo: inventò il concetto di fluxione, cioè la velocità con cui una quantità variava nel tempo. Newton vedeva il calcolo come uno strumento per modellare i movimenti e i cambiamenti naturali.
- **Gottfried Wilhelm Leibniz** sviluppò indipendentemente idee simili, ma diede loro una forma più astratta e sistematica. Creò una **notazione simbolica** $\frac{dy}{dx}$ per la derivata e $\int$ per l'integrale che si è dimostrata eccezionalmente potente e che utilizziamo ancora oggi.

Entrambi gli scienziati si contesero acerrimamente il titolo di inventori, o scopritori (dipende dai punti di vista), di questa nuova branca della matematica e, sebbene fossero divisi da una vivace contesa sulla priorità dell'invenzione, entrambi condividevano una stessa intuizione profonda: la necessità di formalizzare il concetto di variazione continua. Un'intuizione che avrebbe dato origine al calcolo infinitesimale come disciplina autonoma. Intuizione che aveva nel cuore il concetto di **Numero Infinitesimo**.

Per Newton e Leibniz un “Numero Infinitesimo” è una quantità lineare, che indichiamo con dx minore, in valore assoluto, di ogni numero reale x positivo, ma diverso da zero e per il quale continuano a valere le ordinarie regole algebriche nell'insieme ordinato dei numeri reali R .

Grazie al concetto di infinitesimo diventa facile introdurre i concetti di derivata e di integrale e dedurre le regole di derivazione e di integrazione.

Per Leibniz e Newton la derivata di una funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è definita nel seguente modo:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{f(x + dx) - f(x)}{dx}$$

In prima battuta sembra che non ci sia nulla di sbagliato. Consideriamo ora la funzione $f(x) = x^2$ e calcoliamone la derivata con la definizione precedente.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{dy}{dx} = \frac{(x + dx)^2 - x^2}{dx} = \frac{x^2 + 2xdx + d^2x - x^2}{dx} = \frac{dx(2x + dx)}{dx} \\ &= 2x + dx = 2x \end{aligned}$$

E il dx ? Che fine ha fatto? Per Leibniz e Newton un infinitesimo è trascurabile rispetto ad un numero reale, che in questo caso è $2x$. Ma facciamo la seguente osservazione:

$\mathbb{R}$ è una struttura di campo, questo significa che $\mathbb{R}$ è dotato di elemento neutro rispetto all'addizione, che è 0 (ovvero $x+0=x=0+x \ \forall x \in \mathbb{R}$). Ma giacché $2x+dx=2x=dx+2x$, per quanto appena detto ne consegue che $dx=0$. Assurdo per due motivi:

- 1) Per definizione di infinitesimo;
- 2) Quando si divide per dx si presuppone che esso sia diverso da zero, e quando si elimina il dx questo significa per l'osservazione precedente che questo è uguale a zero.

Quindi è oppure no uguale a zero? Beh, si può dunque concludere che questa definizione è priva di rigore e dà luogo ad ambiguità.

Per superare queste obiezioni fu necessaria una rifondazione del calcolo e c'erano due sole possibilità:

- 1) Abolire gli infinitesimi e rifondare il calcolo su nuove basi, come fecero Cauchy e Weierstrass col concetto di limite, portando alla fondazione dell'odierna Analisi.
- 2) Ridefinendo in maniera rigorosa l'impostazione originaria di Leibniz e Newton, come fece Abraham Robinson con la fondazione della branca dell'Analisi Non-Standard.

...ma questa è un'altra storia.

Modellizzazione matematica di fenomeni tempo-varianti

Quando pensiamo alla guida di un veicolo, immaginiamo velocità, curve, frenate tutte azioni che mutano continuamente nel tempo. Ed è proprio il cambiamento continuo che la fisica, con l'utilizzo degli strumenti forniti dall'analisi matematica, si occupa di descrivere e studiare.

Grazie a questi strumenti, come derivate e integrali, è possibile modellare fenomeni fondamentali: l'andamento della velocità, la variazione delle forze durante una curva, il consumo energetico su un percorso. Questi modelli matematici permettono di ottimizzare le prestazioni dei veicoli, aumentare la sicurezza su strada e migliorare l'efficienza energetica.

Quando guidiamo ogni variazione nella velocità o nella traiettoria dell'auto può essere descritta matematicamente attraverso le derivate. A tal proposito definiamo la velocità istantanea e l'accelerazione di un corpo (che può essere, ovviamente, un veicolo):

$$v = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{dr}{dt} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{r(t+dt) - r(t)}{dt}, \text{ ovvero la derivata della posizione rispetto al tempo;}$$

$$a = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{dv}{dt} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{v(t+dt) - v(t)}{dt}, \text{ ovvero la derivata della velocità istantanea;}$$

ma che in realtà, in un moto generico, sono le seguenti:

$$v(t) = \frac{d(r(t))}{dt}; \quad a(t) = \frac{d(v(t))}{dt}$$

Queste idee sono applicate, ad esempio, nella **frenata**: la decelerazione indica quanto rapidamente il veicolo rallenta, influenzando direttamente lo spazio di arresto. **Il tempo di reazione del conducente e la velocità iniziale** sono **fattori cruciali** che, **descritti tramite il calcolo differenziale**, permettono di stimare con precisione la distanza necessaria per fermarsi in sicurezza. Anche i sistemi di sicurezza avanzata, come **ABS** ed **ESP**, si basano su questi principi: monitorando continuamente le variazioni di velocità delle ruote, sono in grado di prevenire il bloccaggio o la perdita di controllo, garantendo una guida più sicura anche in condizioni difficili.

Durante la guida il consumo di carburante o di energia elettrica non è costante, ma varia in base alla velocità, al tipo di percorso e allo stile di guida. Per stimare l'autonomia

residua su un tragitto irregolare, l'analisi ci offre uno strumento fondamentale: l'integrale.

Attraverso gli integrali, è possibile sommare il consumo istantaneo di carburante in ogni istante di tempo, ottenendo così una misura precisa dell'energia totale richiesta per completare un percorso.

Se indichiamo con $C(t)$ la funzione che esprime il consumo istantaneo di un veicolo, allora il consumo tra l'istante iniziale (t_0) e quello finale (t_γ) sarà dato da:

$$\text{Consumo totale} = \int_{t_0}^{t_\gamma} C(t)dt$$

Questa tecnica permette di prevedere, ad esempio, quanto un viaggio su strade collinari o trafficate influenzi il consumo rispetto a un tragitto autostradale.

Nel design dei veicoli, l'aerodinamica è cruciale per ridurre la resistenza dell'aria e migliorare l'efficienza. Più una macchina è aerodinamica, meno energia serve per farla muovere. Questo si può capire con una semplice formula che descrive la forza di resistenza:

$$F = \frac{1}{2} \rho^2 CA$$

Allo stesso modo, nella logistica e nel traffico, la matematica è essenziale per migliorare i tempi di percorrenza. Grazie a modelli matematici, come le **equazioni differenziali**, possiamo ottimizzare il flusso delle auto e ridurre i tempi di attesa, migliorando l'efficienza del traffico e la sostenibilità dei trasporti.

L'Analisi Matematica al servizio dello sviluppo tecnologico

Attraverso questo articolo, si è voluto evidenziare come l'Analisi Matematica, nata da esigenze pratiche legate alla comprensione del movimento e del cambiamento, si sia evoluta fino a diventare uno strumento imprescindibile per lo sviluppo tecnologico contemporaneo. Dall'indagine storica ai primi concetti teorici, fino alle applicazioni moderne nella progettazione e nell'esperienza di guida, emerge il valore profondo di una disciplina capace di coniugare rigore scientifico e creatività. L'auspicio è che

questa riflessione possa stimolare nei lettori non solo una maggiore curiosità verso l'Analisi Matematica, ma anche una consapevolezza più ampia del suo ruolo vitale nel progresso scientifico e nella vita quotidiana.

Dunque è questa, una parte, della matematica e dell'ingegneria presente dietro alla... guida!

"Quando saliamo in macchina e guidiamo, diamo per scontato che tutto funzioni alla perfezione. Dietro a ogni curva affrontata, a ogni frenata, a ogni litro di carburante risparmiato, c'è il lavoro silenzioso della matematica. È una matematica invisibile, che plasma il nostro mondo senza farsi notare, ma di cui non potremmo fare a meno."

Fonti consultate:

- **OpenAI – ChatGPT:** modello linguistico utilizzato come supporto nella ricerca delle informazioni e nella stesura dei contenuti, con l'obiettivo di approfondire e consolidare conoscenze già acquisite nel campo del calcolo infinitesimale e delle sue applicazioni.
- **Wikipedia – Enciclopedia libera:** sezioni relative a calcolo infinitesimale, aerodinamica, dinamica del veicolo e sistemi di controllo (ABS, ESP). Disponibile su: <https://it.wikipedia.org>

Empatia Artificiale: Interazione Uomo-Robot tra Cognizione, Emozione e Tecnologia

a cura di

Lorenzo D'Errico - studente XXXVIII Ciclo di Dottorato Nazionale in
Intelligenza Artificiale

Dipartimento di Ingegneria Elettrica e delle Tecnologie dell'Informazione (DIETI),
Università di Napoli "Federico II"

lorenzo.derrico@unina.it – Sito personale: lorenzoderrico.com

Scopus: <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=57838369700>

L'Human-Robot Interaction (HRI) rappresenta un campo di ricerca interdisciplinare volto a comprendere, modellare e migliorare l'interazione tra esseri umani e sistemi robotici, con l'obiettivo di renderla quanto più naturale, efficace e socialmente accettabile. In questo contesto, l'intelligenza artificiale (IA) gioca un ruolo cruciale nel dotare i robot di capacità percettive, decisionali e adattive, fondamentali per la costruzione di una relazione bidirezionale significativa. All'interno dell'HRI, la robotica cognitiva si propone di integrare modelli computazionali ispirati ai processi cognitivi umani con tecniche avanzate di IA, al fine di sviluppare robot capaci di percepire, interpretare e rispondere in modo contestuale agli stati emotivi e comportamentali degli interlocutori umani. Tale capacità è resa possibile attraverso l'elaborazione multimodale di segnali provenienti da fonti eterogenee, quali espressioni facciali, segnali vocali e dati fisiologici acquisiti mediante dispositivi indossabili (es. braccialetti sensorizzati, elettroencefalografi). L'articolo presenta una sintesi di alcuni studi sperimentali condotti nell'ambito dell'HRI, in cui sono stati implementati sistemi di classificazione automatica degli stati emotivi e comportamentali umani, con successiva modulazione del comportamento robotico in funzione degli stessi. I risultati ottenuti evidenziano l'impatto di strategie di interazione robotica positive sul miglioramento della predisposizione dell'utente e sulla qualità della relazione uomo-macchina.

Keywords: HRI, SAR, Intelligenza Artificiale, segnali fisiologici, riconoscimento di emozioni

Introduzione e contesto

Negli ultimi decenni, l'evoluzione della robotica ha portato allo sviluppo di sistemi sempre più sofisticati, capaci non solo di eseguire compiti fisici, ma anche di interagire con gli esseri umani in modo sociale e collaborativo. All'interno di questo panorama si inserisce la Human-Robot Interaction (HRI), disciplina interdisciplinare che studia come progettare, realizzare e valutare l'interazione tra persone e robot. L'HRI non si limita agli aspetti tecnici dell'interazione, ma integra conoscenze provenienti da psicologia, neuroscienze, design, linguistica e intelligenza artificiale, con l'obiettivo di rendere la comunicazione con i robot più naturale, comprensibile e accettabile per l'essere umano.

L'interesse crescente verso l'HRI è legato a una trasformazione profonda nel modo in cui i robot vengono concepiti: non più semplici strumenti meccanici confinati alle catene di montaggio, ma veri e propri agenti sociali, capaci di affiancare l'uomo in ambiti quotidiani. In particolare, la robotica sociale assistiva (*Socially Assistive Robotics*, SAR) si propone di fornire supporto emotivo, cognitivo e motivazionale, senza implicare un'assistenza fisica diretta. Tali robot trovano applicazione in ambito educativo, terapeutico e riabilitativo, con l'obiettivo di migliorare la qualità della vita (Quality of Life, QoL) di persone anziane, con disabilità o disturbi cognitivi, offrendo soluzioni personalizzate, accessibili e sostenibili. [1].

A tal fine, la ricerca sta integrando nei modelli robotici concetti derivati dalla Theory of Mind (ToM). Questo paradigma, originariamente sviluppato in ambito psicologico, descrive la capacità di attribuire stati mentali agli altri, come intenzioni, emozioni o credenze. La sua trasposizione in ambito robotico mira a dotare le macchine della capacità di inferenziare lo stato interno dell'interlocutore umano, per poter modulare adeguatamente il proprio comportamento, migliorando l'efficacia e l'accettabilità dell'interazione [2].

Un elemento centrale per l'implementazione di questa capacità è l'uso di segnali fisiologici [3] — come l'elettroencefalogramma (EEG), la risposta galvanica della pelle (GSR) e la frequenza cardiaca (HRV) — che consentono di monitorare in modo

oggettivo e continuo lo stato interno dell'utente. Questi dati permettono di classificare stati come lo stress, l'attenzione, l'engagement o l'arousal emotivo, fornendo una base adattiva per il comportamento robotico. In questo contesto, dunque, l'Intelligenza Artificiale (IA) gioca un ruolo determinante: l'integrazione di algoritmi di apprendimento automatico, riconoscimento delle emozioni e modellazione del comportamento consente ai robot di interpretare segnali complessi provenienti dagli esseri umani – come espressioni facciali, tono della voce, movimenti o persino segnali fisiologici [4, 5] – e di rispondere in modo coerente e adattivo. Grazie a queste capacità, i robot possono diventare compagni empatici, capaci di offrire sostegno psicologico, educativo o terapeutico, in ambienti come case, scuole, ospedali o strutture di riabilitazione [6].

La conferma del crescente interesse nel settore `e ulteriormente sottolineata dalla Commissione Europea che ne ha riconosciuto l'importanza strategica, promuovendone la ricerca e lo sviluppo di tecnologie centrate sull'uomo e basate su principi di affidabilità, trasparenza e rispetto dei diritti. Il Piano Coordinato sull'Intelligenza Artificiale¹, pubblicato nel 2018 e aggiornato nel 2021, ne `e un esempio significativo, volto a incoraggiare un ecosistema europeo dell'innovazione che tenga conto non solo delle prestazioni tecniche, ma anche dell'impatto sociale ed etico delle nuove tecnologie.

Nonostante gli importanti progressi scientifici e tecnologici, la piena accettazione dei robot da parte degli utenti rimane ancora una sfida aperta. Diversi studi indicano come molti sistemi attuali si basino su modelli statici e poco flessibili, che non tengono adeguatamente conto delle caratteristiche individuali, emotive e comportamentali delle persone [7]. Ciò può generare frustrazione, diffidenza o semplice disinteresse da parte degli utenti, soprattutto in contesti delicati come quelli della salute mentale o dell'educazione. Per affrontare questa criticità, diventa sempre più urgente sviluppare robot capaci di osservare, comprendere e adattarsi allo stato mentale ed emotivo

dell'interlocutore umano, regolando dinamicamente il proprio comportamento in funzione del contesto, delle esigenze e delle preferenze individuali [8].

Tecnologie per l'adattamento empatico nella SAR

La possibilità di costruire robot realmente empatici e adattivi richiede quindi l'impiego di modelli di interazione personalizzati, in grado di riconoscere lo stato interno dell'utente e di adattare conseguentemente il comportamento robotico. In questo contesto, la robotica sociale assistiva (SAR) si fonda sulla capacità del sistema di percepire segnali significativi dell'utente e di elaborarli per modellare un'interazione sensibile e contestuale.

Per ottenere una stima attendibile dello stato emotivo e cognitivo dell'interlocutore, è fondamentale disporre di dati che vadano oltre l'osservazione esterna del comportamento. Sebbene espressioni facciali, postura e tono della voce siano informazioni preziose, esse possono risultare ambigue o facilmente mascherabili, soprattutto in soggetti con disabilità cognitive, disturbi della comunicazione o in condizioni emotive complesse. Al contrario, l'analisi di segnali fisiologici — come l'elettroencefalogramma (EEG), la risposta galvanica della pelle (GSR) o la frequenza cardiaca (HRV) — permette di accedere a informazioni intrinseche, oggettive e spesso inconsce, legate allo stato affettivo e attentivo dell'individuo.

Questi segnali possono essere acquisiti in modo non invasivo tramite sensori indossabili o dispositivi leggeri, e rappresentano una fonte dati essenziale per costruire modelli predittivi basati su intelligenza artificiale. L'utilizzo di tecniche di apprendimento automatico e profondo (ad esempio, reti neurali profonde, SVM, Random Forest o le più recenti CNN) consente di classificare o stimare parametri emozionali, come la valenza e l'arousal, che a loro volta fungono da indicatori per la modulazione del comportamento robotico. Tali parametri rappresentano una base di astrazione su cui costruire strategie di risposta, ad esempio scegliendo uno stile comunicativo più rassicurante o energico a seconda della condizione dell'utente.

L'architettura interattiva (vedi Fig.1) che ne deriva prevede generalmente tre livelli funzionali:

1. un livello di percezione multimodale, che acquisisce dati da più fonti (segnali fisiologici, eventualmente vocali o visivi);
2. un livello interpretativo, che stima lo stato interno dell'utente tramite modelli IA;
3. un livello esecutivo, che adatta l'interazione robotica (espressioni, vocalità, contenuto) in funzione dello stato stimato.

Questo approccio consente di superare la rigidità dei modelli standardizzati, offrendo un'interazione realmente personalizzata, in grado di generare fiducia e coinvolgimento anche in contesti delicati come la riabilitazione, la terapia cognitiva o l'assistenza quotidiana.



Figura 1: Pipeline per l'adattamento empatico: acquisizione dei segnali, interpretazione IA, comportamento robotico adattivo.

Nelle sezioni successive verranno presentati alcuni risultati sperimentali ottenuti in contesti applicativi reali, che mostrano l'efficacia dell'integrazione tra robotica cognitiva, modelli di intelligenza artificiale e segnali fisiologici nella progettazione di interazioni adattive e personalizzate. I casi studio riportati forniscono esempi concreti dell'impatto che queste tecnologie possono avere nel migliorare la qualità dell'interazione uomo-robot, in particolare in ambiti assistivi e terapeutici.

Applicazioni sperimentali e casi studio

Caso studio: valutazione della Theory of Mind nell'interazione uomo-robot

In linea con l'obiettivo di realizzare robot socialmente assistivi capaci di interagire in modo empatico e personalizzato, questo studio [2] esplora una delle capacità cognitive più complesse e centrali per l'adattamento sociale: la Theory of Mind (ToM), ovvero la capacità di attribuire stati mentali — intenzioni, desideri, credenze — agli altri. Questo caso studio esplora l'influenza dell'atteggiamento sociale di un robot umanoide (Pepper) sulla capacità degli utenti di attribuirgli stati mentali, misurata attraverso il False Belief Task (FBT), un test classico per valutare la Teoria della Mente (ToM). L'esperimento ha coinvolto 30 partecipanti, divisi in due gruppi: uno ha interagito con un robot programmato con un atteggiamento sociale interattivo (positivo, con movimenti amichevoli e feedback verbali), l'altro con un robot passivo (neutro o negativo, con comportamenti distaccati). I risultati hanno mostrato che la maggior parte dei partecipanti ha superato il FBT, indicando che gli esseri umani possono attribuire stati mentali anche a robot. Tuttavia, il gruppo che ha interagito con il robot interattivo (vedi Fig.2) ha ottenuto prestazioni leggermente migliori, suggerendo che l'atteggiamento sociale del robot influisce sulla percezione della sua "mente". Inoltre, il questionario Godspeed ha rivelato che il robot interattivo è stato percepito come più elegante e piacevole, confermando l'efficacia della manipolazione sperimentale.

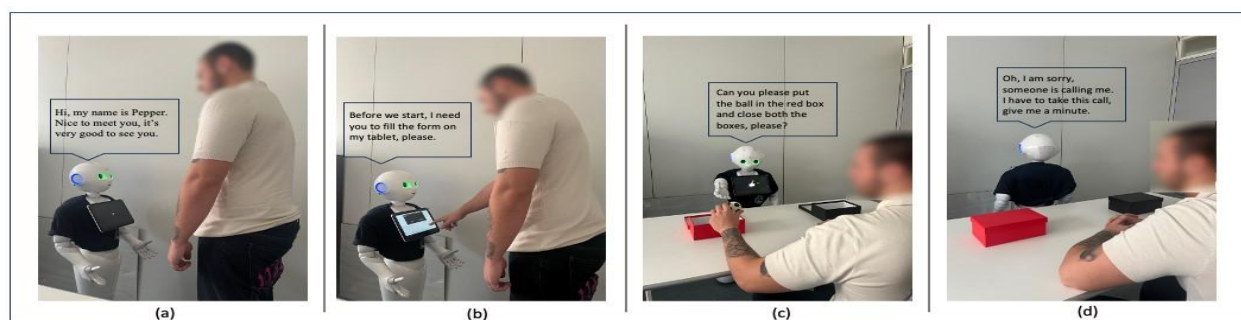


Figura 2: Procedura sperimentale - interazione con robot positivo.

Non sono emerse correlazioni significative tra i punteggi auto-valutati della ToM (misurati con il ToMI) e le prestazioni nel FBT, lasciando aperta la questione su come la ToM auto-percepita si relazioni all'interpretazione degli stati mentali del robot. Lo

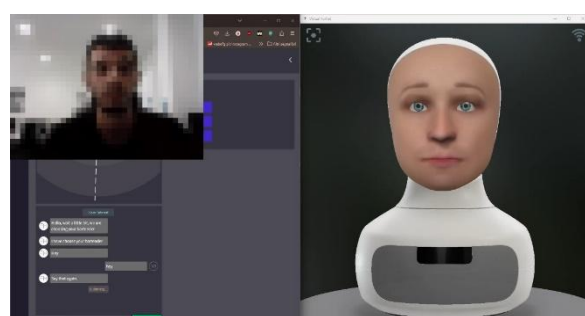
studio sottolinea l'importanza della programmazione comportamentale dei robot per facilitare interazioni sociali efficaci e offre spunti per future ricerche sull'integrazione della ToM nella robotica sociale.

Caso studio: influenza dell'identità sociale nell'interazione uomo-robot

Questo caso studio [7] esplora come l'identità sociale e i tratti di personalità influenzino l'interazione tra esseri umani e robot, con un focus su un robot bartender programmato con due personalità distinte: una positiva (amichevole e allegra) e una negativa (scontrosa e disinteressata). L'esperimento ha coinvolto 28 partecipanti, principalmente studenti di informatica, che hanno interagito con il robot umanoide Furhat in uno scenario di bar virtuale (vedi Fig.3). I risultati hanno dimostrato che i partecipanti erano in grado di distinguere chiaramente le due identità del robot, confermando l'efficacia della programmazione comportamentale nel trasmettere personalità specifiche. Il questionario Godspeed ha rivelato che il robot con identità positiva è stato percepito come più piacevole, amichevole e intelligente rispetto a quello con identità negativa, sebbene quest'ultimo abbia mantenuto un certo livello di credibilità. L'analisi statistica, inclusi test t-test e coefficienti di correlazione di Pearson, ha evidenziato che le percezioni dei partecipanti erano influenzate dai loro tratti di personalità, in particolare dall'estroversione e dall'apertura mentale.



(a) Interazione positiva.



(b) Interazione negativa.

Figura 3: Procedura sperimentale di interazione con il robot virtuale Furhat.

Lo studio ha anche utilizzato l'analisi fattoriale per identificare variabili latenti come l'”indice di simpatia”, il” fattore di credibilità” e l'”indice di disagio”, che hanno

mostrato differenze significative tra le due identità del robot. Questi risultati suggeriscono che personalizzare l'identità sociale dei robot in base alle caratteristiche degli utenti può migliorare l'esperienza di interazione, rendendola più naturale e coinvolgente. Sebbene il campione limitato richieda ulteriori verifiche, la ricerca offre spunti preziosi per lo sviluppo di robot sociali più efficaci, sottolineando l'importanza di integrare identità sociali ben definite nella progettazione di interazioni uomo-robot.

Caso studio:

classificazione delle emozioni tramite EEG durante l'interazione uomo-robot

In questo lavoro [9] `e stato esplorato il riconoscimento delle emozioni umane nell'interazione uomo-robot (HRI) tramite segnali cerebrali EEG. Lo studio ha coinvolto 10 partecipanti che hanno interagito con un robot Pepper programmato con due personalità distinte - positiva e negativa - per indurre differenti stati emotivi (vedi Fig.4). È stata utilizzata la teoria dell'asimmetria cerebrale frontale (FBA), analizzando



Figura 4: Procedura sperimentale.

le onde alfa e beta nelle regioni frontali del cervello per misurare valenza e arousal emotivo. I dati EEG raccolti sono stati elaborati attraverso un modello di ottimizzazione globale (GOM) che combina tecniche di selezione delle caratteristiche e ottimizzazione degli iperparametri per migliorare la classificazione. Sono stati testati otto modelli di machine learning (tra cui SVM con diversi kernel, Random Forest, Logistic Regression e Multi Layer Perceptron), con i classificatori SVM che hanno raggiunto la migliore accuratezza (92%) utilizzando solo il 5% delle caratteristiche disponibili. L'analisi ha

confermato che le onde gamma, beta e alfa sono le più predittive per la classificazione delle emozioni, con i valori di arousal particolarmente significativi. I risultati dimostrano che è possibile classificare efficacemente le risposte emotive degli utenti durante l'interazione con robot sociali utilizzando dispositivi EEG commerciali.

L'approccio proposto offre vantaggi rispetto ai metodi tradizionali basati su espressioni facciali o gesti, in quanto fornisce una valutazione diretta degli stati emotivi interni senza richiedere sensori invasivi. Gli autori suggeriscono che l'integrazione di questi sistemi BCI in tempo reale potrebbe migliorare significativamente l'efficacia delle interazioni sociali uomo-robot nel futuro.

Il progetto SPECTRA

Questo studio preliminare si inserisce nel più ampio contesto del progetto SPECTRA (Supporting schizophrenia PatiEnts Care wiTh aRtificial intelligence), che mira a supportare i clinici nell'identificazione precoce dei pazienti affetti da Schizofrenia Resistente al Trattamento (TRS). La ricerca esplora il riconoscimento delle emozioni nei pazienti con schizofrenia attraverso l'analisi di segnali biometrici, concentrandosi in particolare su dati elettroencefalografici (EEG) e parametri fisiologici raccolti mediante dispositivi indossabili. È importante sottolineare che questa ricerca rappresenta solo un passo iniziale nell'esplorazione del riconoscimento delle emozioni nei pazienti con schizofrenia. Gli sviluppi futuri del progetto SPECTRA prevedono l'espansione del campione analizzato, l'incorporazione di ulteriori modalità fisiologiche e l'ottimizzazione dei modelli di apprendimento automatico. Un aspetto particolarmente innovativo in fase di sviluppo è l'idea di utilizzare robot per la somministrazione di questi test, potenzialmente migliorando la standardizzazione e l'accuratezza delle valutazioni cliniche. Con l'avanzamento delle tecnologie neuroscientifiche e dell'intelligenza artificiale, studi come questo potrebbero contribuire a una comprensione più profonda della schizofrenia, aprendo la strada a nuovi approcci diagnostici e terapeutici che impattino positivamente sulla qualità della vita dei pazienti e sull'efficacia degli interventi clinici.

Conclusioni

La ricerca presentata in questo articolo evidenzia il potenziale dell'integrazione tra robotica cognitiva, intelligenza artificiale e analisi dei segnali fisiologici nella creazione di sistemi robotici empatici e adattivi. I casi studio illustrati dimostrano come l'interazione uomo-robot possa essere significativamente migliorata quando i robot sono in grado di percepire, interpretare e rispondere adeguatamente agli stati emotivi e cognitivi degli interlocutori umani. In particolare, è emerso che la programmazione di identità sociali positive nei robot influenza positivamente la percezione e l'attribuzione di stati mentali da parte degli utenti, migliorando la qualità complessiva dell'interazione. Inoltre, l'utilizzo di segnali elettroencefalografici (EEG) per la classificazione degli stati emotivi si è dimostrato un approccio efficace e non invasivo, capace di fornire informazioni oggettive sullo stato interno dell'utente che possono guidare l'adattamento del comportamento robotico. I risultati ottenuti negli studi presentati offrono indicazioni promettenti per il futuro della Socially Assistive Robotics (SAR), suggerendo che robot dotati di capacità empatiche possono rappresentare strumenti preziosi in contesti educativi, terapeutici e assistenziali. La possibilità di personalizzare l'interazione in base alle caratteristiche individuali degli utenti apre nuove prospettive per applicazioni in ambiti sensibili, come quello della salute mentale esplorato nel progetto SPECTRA. Nonostante i progressi significativi, permangono sfide importanti da affrontare. La ricerca futura dovrà concentrarsi sull'ampliamento dei campioni analizzati, sull'integrazione di modalità percettive multiple e sullo sviluppo di modelli di interazione sempre più naturali e contestuali. Sarà inoltre fondamentale approfondire gli aspetti etici legati all'implementazione di sistemi robotici empatici, garantendo trasparenza, privacy e rispetto dell'autonomia degli utenti. In conclusione, l'empatia artificiale rappresenta una frontiera promettente della ricerca in Human-Robot Interaction, con il potenziale di trasformare profondamente il modo in cui interagiamo con le tecnologie robotiche. Lo sviluppo di robot socialmente intelligenti, capaci di comprendere e rispondere adeguatamente alle emozioni umane, non solo migliorerà l'efficacia e l'accettabilità di questi sistemi, ma potrà contribuire

significativamente alla qualità della vita di persone con esigenze speciali, aprendo la strada a nuove forme di supporto e assistenza personalizzata.

Ringraziamenti. *Un ringraziamento speciale va alla Professoressa Mariacarla Staffa per la sua guida durante la ricerca e gli studi effettuati e i partecipanti tutti.*

Riferimenti bibliografici

- [1] Mariacarla Staffa, Lorenzo D’Errico, Ilaria Amaro, Attilio Della Greca, Rita Francese, Genoveffa Tortora, Cesare Tucci, and Giuliana Vitiello. Ai for emotional human-robot interaction in assistive scenarios. In *CEUR WORKSHOP PROCEEDINGS*, volume 3486, pages 183–188, 2023.
- [2] Luigi Marino, Lorenzo D’Errico, Marco Matarese, Angelo Cangelosi, and Mariacarla Staffa. Theory of mind assessment in human-robot interaction. In *International Conference on Social Robotics*, pages 33–42. Springer, 2024.
- [3] Danilo Greco, Paola Barra, Lorenzo D’Errico, and Mariacarla Staffa. Multimodal interfaces for emotion recognition: Models, challenges and opportunities. In *International Conference on Human-Computer Interaction*, pages 152–162. Springer, 2024.
- [4] Mariacarla Staffa and Lorenzo D’Errico. Eegbased machine learning models for emotion recognition in hri. In *International Conference on Human-Computer Interaction*, pages 285–297. Springer, 2023.
- [5] Luigi Galluccio, Lorenzo D’Errico, Maurizio Giordano, and Mariacarla Staffa. Advancing eeg-based emotion recognition: Unleashing the power of graph neural networks for dynamic and topology-aware models. In *2024 International Joint Conference on Neural Networks (IJCNN)*, pages 1–8. IEEE, 2024.
- [6] Ilaria Amaro, Rita Francese, Genoveffa Tortora, Cesare Tucci, Lorenzo D’Errico, and Mariacarla Staffa. Supporting schizophrenia patients’ care with robotics and artificial intelligence. In *International Conference on Human-Computer Interaction*, pages 482–495. Springer, 2023.
- [7] Mariacarla Staffa, Lorenzo D’Errico, and Antonio Maratea. Influence of social identity and personality traits in human–robot interactions. *Robotics*, 13(10):144, 2024.
- [8] Mariacarla Staffa, Lorenzo D’Errico, and Rita Francese. Emphasizing with a robot with a personality. In *International Conference on Human-Computer Interaction*, pages 283–294. Springer, 2024.
- [9] Mariacarla Staffa, Lorenzo D’Errico, Simone Sansalone, and Maryam Alimardani. Classifying human emotions in hri: applying global optimization model to eeg brain signals. *Frontiers in Neurorobotics*, 17:1191127, 2023.

30° CIRCOLO DIDATTICO “G. PARINI” - NAPOLI

Il triangolo: mattone fondamentale della geometria

a cura di

Classi 5[^]

coordinati dal Maestro Bruno Cipolletta

Ogni figura può essere costruita con i triangoli!

Questo lavoro è stato svolto dagli alunni delle classi V del 30° C.D. Giuseppe Parini di Napoli e sarà presentato al XVIII° Convegno “*Studenti in cattedra docenti nei banchi*” che si terrà nei giorni 23-24 e 25 maggio 2025 a Castellammare di Stabia.

Lo scopo dell’attività è di far conoscere agli alunni il rapporto tra la figura del triangolo e le altre figure geometriche. A tal fine è stato chiesto loro di disegnare diversi quadrati, di tracciare una delle diagonali e poi di ritagliare le figure. Una volta ritagliati i quadrati si è proceduto al taglio lungo la diagonale in modo da ottenere diversi triangoli, con i quali i bambini hanno provato a costruire altre figure geometriche.

Successivamente con l’aiuto del compasso hanno disegnato e poi ritagliato sei triangoli equilateri con i quali hanno potuto ricostruire un esagono regolare. Partendo dalle caratteristiche del triangolo equilatero e dalla formula del calcolo dell’area del triangolo i bambini hanno calcolato l’area dell’esagono appena ricostruito, hanno scoperto un nuovo “attore” ovvero l’apotema e trovato un collegamento con la formula dell’area dell’esagono, dando così un significato a quelle che spesso rimangono solo formule da imparare a memoria.

Il triangolo

Qual è la figura geometrica più semplice?

Il triangolo, è la risposta!

Ma cerchiamo di scoprirne la motivazione.

Il triangolo è il poligono con il minor numero di lati (tre) ed è indeformabile, il che lo rende una figura fondamentale in geometria, inoltre, tante figure possono essere scomposte e ricostruite con i triangoli.

Cominciamo: scomponiamo un quadrato.

Disegniamo un quadrato e tracciamo una delle sue diagonali.

La diagonale divide il quadrato in due triangoli rettangoli isosceli.

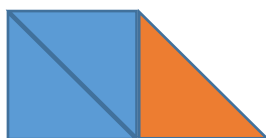


Ora andiamo a vedere quali figure possiamo costruire semplicemente cambiando posizione ai triangoli.

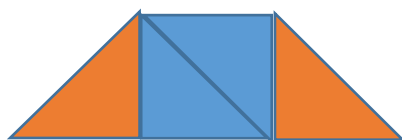
Con due triangoli otteniamo la prima figura: il romboide.



Con tre triangoli uguali possiamo ottenere un trapezio rettangolo.

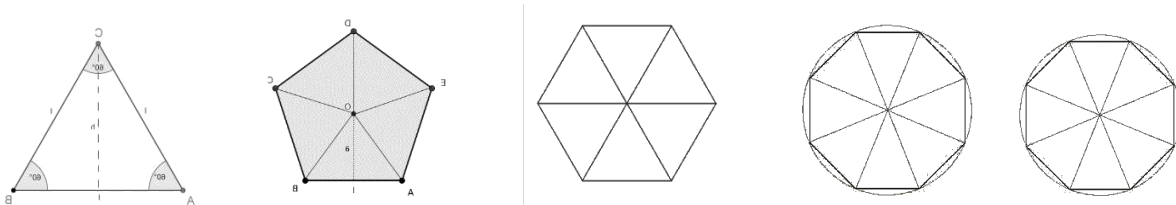


Con quattro triangoli uguali otteniamo un trapezio isoscele

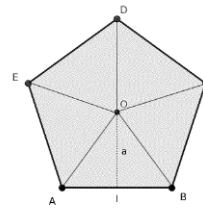


I poligoni regolari

Tutti i poligoni regolari possono essere scomposti in triangoli uguali: in alcuni casi basta semplicemente tracciare le diagonali, come ad esempio nel quadrato, nell'esagono o nell'ottagono



Area dei poligoni regolari:



Versione difficile

L'area di un poligono regolare si ottiene moltiplicando il semiperimetro (p) per l'apotema (a)

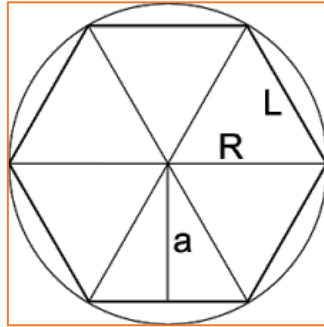
$$A = p \times a$$

dove l'apotema è la distanza di ogni lato dal centro mentre il semiperimetro è la metà del perimetro $2p = P$.



L'esagono

Con l'esagono la vita è più



facile.

Possiamo costruire un esagono partendo dalla costruzione di un triangolo equilatero. Una volta costruito il primo, ne occorrono altri cinque! Sì, perché l'esagono è composto proprio da sei triangoli equilateri. Il lato del triangolo rappresenta anche uno dei lati dell'esagono, e la sua altezza non si chiamerà più altezza ma apotema. Se posso calcolare l'area del triangolo, quella dell'esagono vale sei volte tanto!

$$A = 6 \times L \times a : 2$$

ma $6 \times L$ è la misura del
perimetro



$$A = P \times a : 2$$

Ma allora ...

L'area di un poligono può essere calcolata sommando le aree dei triangoli in cui è stato scomposto!

Conclusione:

Il triangolo è un elemento fondamentale della geometria.

La capacità di scomporre qualsiasi figura geometrica in triangoli semplifica molti problemi geometrici e trova applicazioni in diversi campi.

La scomposizione in triangoli è stata utilizzata fin dall'antichità per risolvere problemi geometrici complessi ed oggi trova applicazione in grafica computerizzata, ingegneria e molte altre discipline.

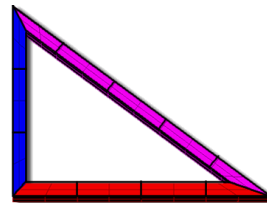
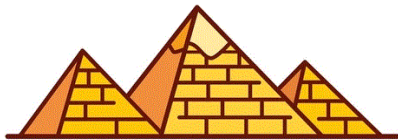
Il triangolo e la storia

Gli Egizi, più di 4000 anni fa, usavano i triangoli per costruire le piramidi e per misurare i campi.

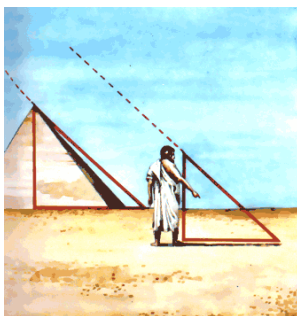
In particolare, c'era un triangolo speciale con i lati di 3, 4 e 5 passi, che usavano per fare gli angoli retti.

Anche i Greci, più di 2500 anni fa, studiavano i triangoli.

Un matematico importantissimo, di nome Talete, scoprì delle proprietà dei triangoli, che usiamo ancora oggi.



Un altro matematico, di nome Euclide, scrisse un libro sui triangoli che è stato usato per secoli.



Talete



Euclide

SCUOLA PRIMARIA

EDUCANDATO STATALE AGLI ANGELI - VERONA

Pi Greco: un numero magico e un po' goloso

*a cura di
Tiziano Barbarotto della classe V
coordinato dalla Maestra Paola Aldegheri*

Ciao a tutti!

Mi presento: sono Tiziano, un bambino di quinta primaria e oggi voglio parlarvi di un numero super speciale: il **pi greco**!

La maestra ci ha spiegato che il pi greco è un numero un po' strano, ma anche molto importante. Sapete perché? Perché ci aiuta a misurare i cerchi! Immaginate una pizza rotonda, la vostra torta di compleanno o una moneta. Beh, il pi greco ci dice quanto è lungo il bordo (che si chiama **circonferenza**) rispetto a quanto è largo il cerchio da una parte all'altra (che si chiama **diametro**). È come se il pi greco fosse un mago che trasforma la larghezza del cerchio nella sua lunghezza! E la cosa ancora più incredibile è che questo numero è sempre lo stesso, non importa quanto sia grande o piccolo il cerchio. È sempre circa **3,14**!

Sì, avete capito bene: tre virgola quattordici. La maestra ci ha detto che in realtà ci sono tantissimi altri numeri dopo la virgola, infiniti! È come se non finissero mai! Però, per fare i nostri calcoli a scuola 3,14 va benissimo.

Ma a cosa serve questo pi greco, vi starete chiedendo? Beh, serve a un sacco di cose! Ad esempio, se vogliamo sapere quanto cornicione c'è nella nostra pizza, usiamo il pi greco. Se dobbiamo costruire una ruota per la bicicletta, usiamo il pi greco. Anche gli scienziati e gli ingegneri lo usano per costruire ponti, aerei e perfino per esplorare lo spazio.

È un po' come avere una ricetta segreta per tutti i cerchi del mondo.

La cosa divertente è che c'è una giornata dedicata al pi greco! Il **14 marzo** (perché ricorda 3,14).

Nella mia scuola si festeggia facendo dei giochi con i ragazzi del liceo. Vi allego delle schede di giochi che abbiamo fatto con i ragazzi del liceo e che potete usare anche voi.

Quindi, la prossima volta che vedrete un cerchio, pensate a questo numero magico, il pi greco. Un numero piccolo ma potentissimo, che ci aiuta a capire meglio il mondo rotondo che ci circonda.

Chissà, magari un giorno anch'io userò il pi greco per costruire qualcosa di super figo!
Ciao a tutti e... viva il pi greco!

SCOPRIAMO IL VALORE DI

PI GRECO DAY
2023

π

Come fare?

Cerca qualcosa di forma circolare (orologi, piatti, ecc.)



Misura la circonferenza e il diametro di ciascun oggetto:



Materiali in più

Cosa ti servirà:



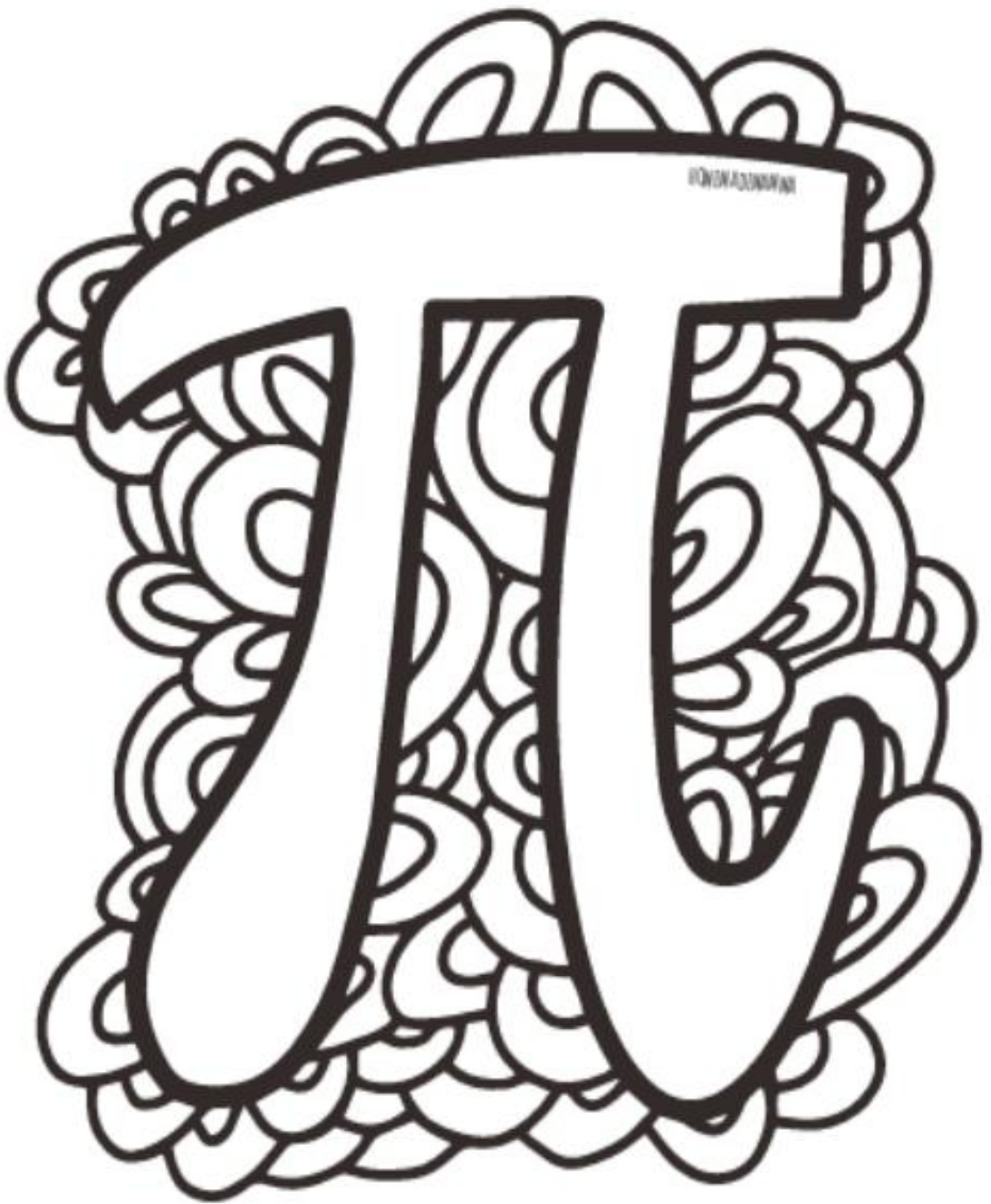
Cordino



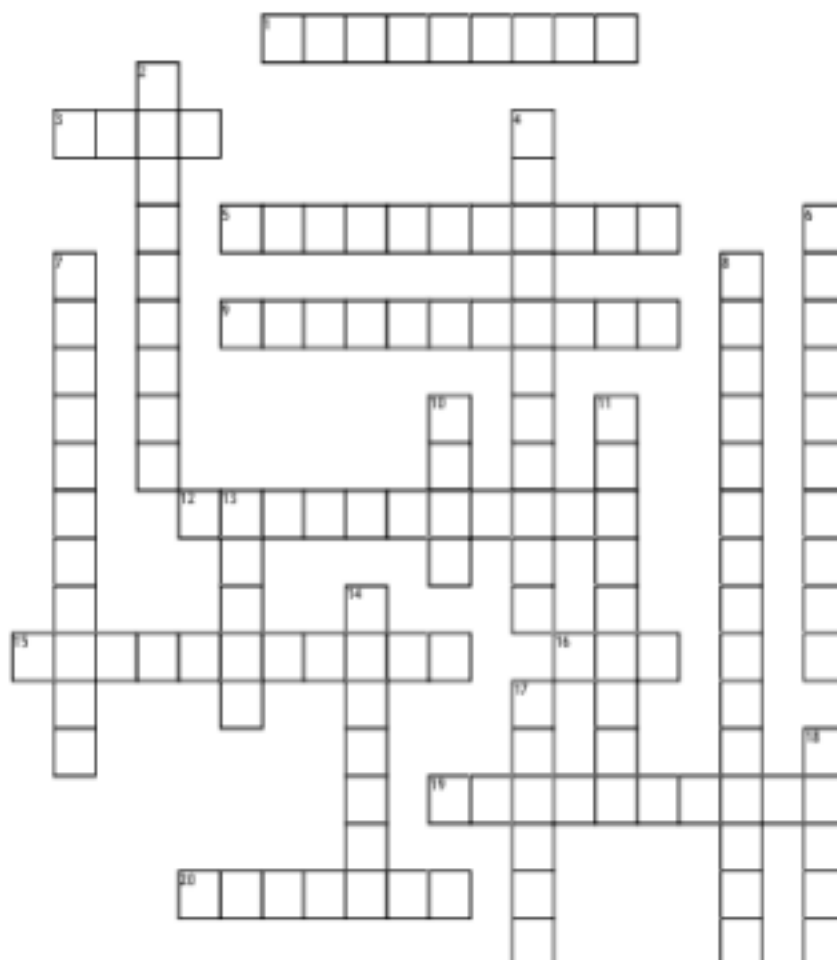
Righello

Ora non ti resta che dividere la circonferenza per il diametro con la calcolatrice e scoprire il risultato:

Oggetto	Circonferenza	Diametro	$\frac{C}{D}$



Cruciverba Pi Greco Day



Across

1. L'operazione che aggiunge
3. Numeri che terminano con 0 - 2 - 4 - 6 - 8
5. Nè verticale nè obliqua
9. L'ordine dal più grande al più piccolo
12. Nè verticale nè obliqua
15. La proprietà che si usa per fare la prova dell' addizione

16. Il segno della moltiplicazione

19. Il numero che viene dopo
20. Separa la regione interna dalla regione esterna

Down

2. Figura con 3 lati
4. Una linea che non è semplice
6. Il numero che viene prima
7. Calcola la differenza

8. E' un'addizione ripetuta

10. Il segno della sottrazione
11. L'ordine dal più piccolo al più grande
13. E' la linea che non cambia mai direzione
14. Numeri che terminano con 1 - 3 - 5 - 7 - 9
17. Un gruppo di dieci
18. Risultato dell'addizione

Pi Day Word Search



Approximation

Diameter

Circle

Pi Day

Irrational

Infinite

Ratio

Radius

Symbol

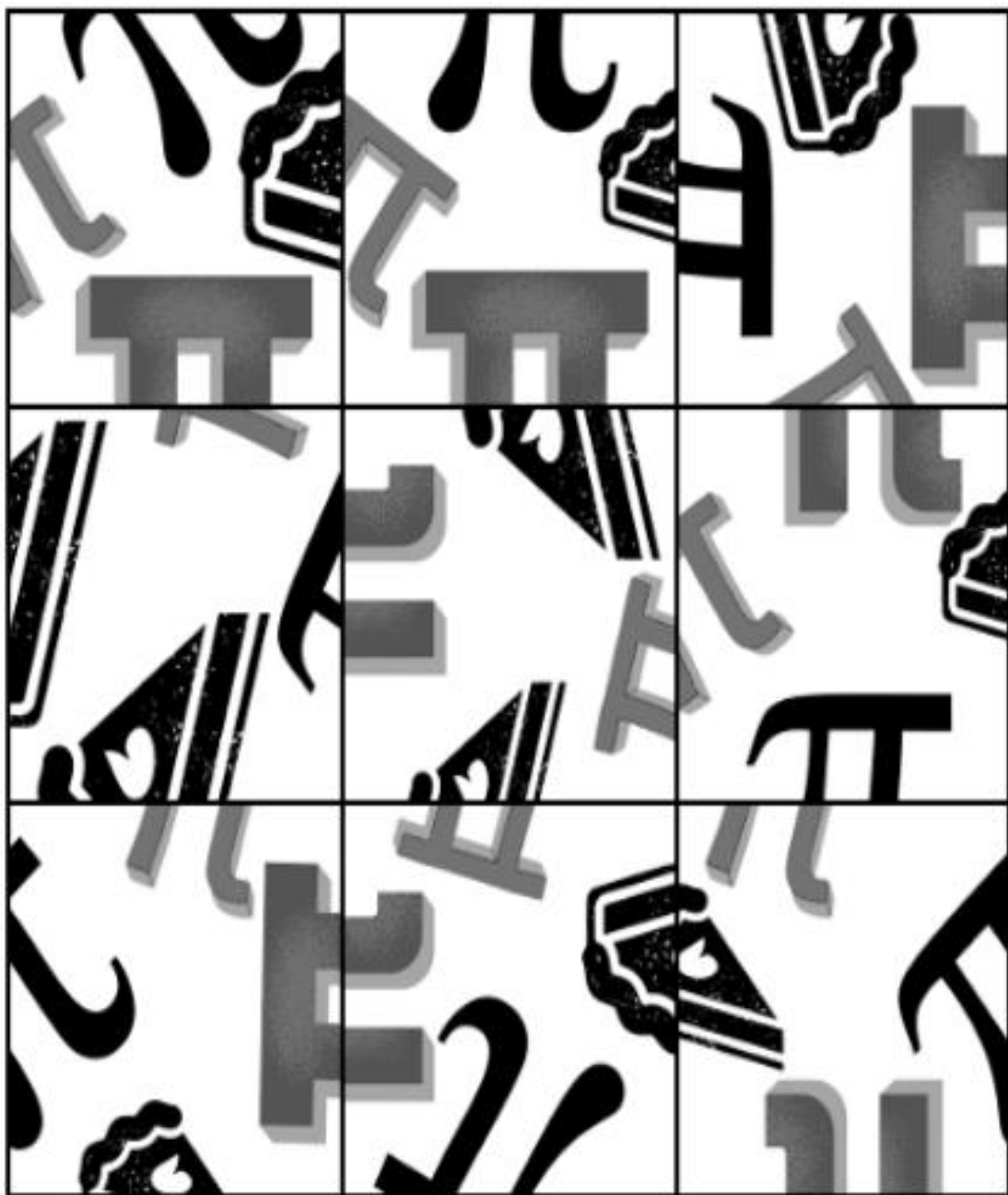
Circumference

Einstein

Decimal

PI PUZZLE

Cut apart the pieces below and assemble them into a 3 x 3 grid so that the puzzle pieces match along each edge.



3
1
4
1
5
9
2
6
5
3

π -Day

$\pi = 3.141592653589793238$

GAME

1. LANCIA IL DADO E COLORA
2. PUOI ADDIZIONARE O SOTTRARRE MOLTIPLICARE O DIVIDERE PER OTTENERE LA CIFRA DELLA CASELLA CHE VUOI COLORARE
3. VINCE CHI COLORA PER PRIMO TUTTE LE CASELLE



3
1
4
1
5
9
2
6
5
3

SCUOLA SECONDARIA DI PRIMO GRADO

EDUCANDATO STATALE AGLI ANGELI - VERONA

Il cubo di Rubik

a cura di

*Diego Negri, Enrico Severi e Noah Spiazzi
della Scuola Secondaria di Primo grado
coordinati dal prof. David Birchall*

Storia del Cubo

Questo incredibile rompicapo fu inventato da Ernő Rubik, un professore di architettura e scultore ungherese nel 1974. L'originale era diverso da come lo conosciamo noi oggi, dato che era in legno e monocoloro. In realtà Rubik scoprì di aver creato un rompicapo solo dopo averlo provato a riassemblare e nel 1979 diventò un nuovo gioco venduto dalle aziende di giocattoli. Il primo cubo inventato era un 3x3x3 con il lato di 5,4 cm, ed è ancora così.

Negli anni successivi vennero inventate ovviamente nuove versioni, sia più semplici come il 2x2x2, sia più difficili come il 4x4x4 o il 5x5x5 ma ne sono stati inventati anche altri con forme molto strane come la piramide, il mirror cube, o tipo mela, cuore oppure stella.

Iniziamo a parlare di numeri

E' interessante parlare del cubo in sé come anche di tutti i numeri che gli girano intorno, dato che tra combinazioni e probabilità non ci si stanca mai.

Chiunque può rimanere sorpreso sapendo che solo per il cubo 2x2 ci sono **3.674.160** combinazioni possibili e solo una tra queste rappresenta il cubo totalmente risolto, vi potranno sembrare poche ma vi garantiamo che per un semplice 2x2 sono molte.

Quindi, per ovvi motivi, sono stati inventati dei metodi scientifici a tutti gli effetti che permettono di fare risoluzioni sotto il secondo!

... e per il 3x3?

L'iconico 3x3 ha solo pochi quadratini in più (5) del 2x2 in una facciata, ma essi fanno salire le cifre delle possibili combinazioni a circa **43.252.003.274.489.856.000** ovvero **43 miliardi di miliardi**. Un numero esorbitante, considerando i pochi cubetti in più. Quando si pensa ad un Cubo di Rubik si pensa subito a questo.

...poi c'è il 4X4

Anche nel 4x4 i quadratini non aumentano di molto, da 9 a 16, invece, le combinazioni aumentano drasticamente fino a **7 401 196 841 564 901 869 874 093 974 498 574 336 000 000 000**.

Ovviamente, dato l'aumento di quadratini rispetto al 3x3, la difficoltà aumenta e così anche il tempo di risoluzione del rompicapo.

Ancora più grandi

Dopo i cubi accennati prima, si arriva a grandi dimensioni, come il 5x5x5 che aumenta le possibili combinazioni a **282. 870. 942. 277. 741. 856. 536. 180. 333. 107. 150. 328. 293. 127. 731. 985. 672. 134. 721. 536. 000. 000. 000. 000. 000**, circa **283 miliardi di miliardi di miliardi di miliardi di miliardi di miliardi di miliardi di combinazioni, ovvero 283 seguito da 72 zeri**.

Ma questo non è il più grande. Esiste, infatti, anche il Dodecaedro oppure il 19x19x19! Ma il più grande e complicato finora creato è il 33x33x33 per il quale anche un esperto impiegherebbe ore a risolverlo.

Ma cosa c'entra la matematica?

Credo che tutti, ora che siamo quasi giunti alla fine delle curiosità, si chiedano che rapporto abbia con i numeri e i calcoli scientifici.

Vi faccio notare che il semplice fatto che qualcuno riesca a risolvere il rompicapo è pura scienza, dato che è grazie a infiniti algoritmi diversi, in base al metodo di risoluzione, che ci permettono di abbassare drasticamente le combinazioni e le probabilità che abbiamo accennato prima.

Esistono vari metodi, tra cui i più conosciuti sono il metodo *A STRATI* e il *FRIDRICH*, che utilizzano varie sequenze di mosse distinte fra loro con lettere e numeri (R2,R.....).

Un po' di record

I record per i cubi di Rubik sono e appartengono a:

2x2: 0,43sec, Teodor Zajder;

3x3: 3,08sec, Yiheng Wang(11 anni!);

4x4: 15,71 sec Max Park;

5x5: 30,45sec, Tymon Kolasiński.

E l'Italia?

Il record italiano di 3x3 appartiene a Valerio Locatelli, 6,03sec.

QUADERNI CACCIOPPOLI
SEZIONE 2

Spunti
per una didattica interdisciplinare

Esperienza di insegnamento in un Centro Provinciale per l'Istruzione degli Adulti (CPIA)

*a cura di
Lucia Guadagnino
Docente di Matematica e Scienze
CPIA Castel Volturno (CE)*

Introduzione alla Matematica e Scienze in un CPIA

L'esperienza come docente di Matematica e Scienze in un CPIA (Centro Provinciale per l'Istruzione degli Adulti), specificamente con il Cpia di Caserta con sede distaccata a Castel Volturno (CE), mi ha dato l'opportunità di lavorare con studenti provenienti da diverse parti del mondo, dal nord Africa ai paesi dell'est.

Questo contesto culturale e sociale estremamente variegato ha rappresentato una sfida stimolante e, al tempo stesso, un'importante occasione di crescita professionale e umana. Le classi erano costituite da allievi che presentavano livelli di preparazione molto eterogenei, spesso influenzati da percorsi scolastici frammentari o interrotti nei loro paesi di origine.

Per rispondere a questa varietà, ho adottato un approccio didattico flessibile, privilegiando strumenti visivi e pratici, come utilizzo di esempi concreti tratti dalla vita quotidiana per spiegare concetti matematici complessi o esperimenti semplici per rendere la scienza più comprensibile.

Difficoltà e metodologia di approccio

Una delle principali difficoltà è stata quella di affrontare la diversità linguistica. Per molti studenti, infatti, l'italiano rappresentava una lingua nuova o parzialmente conosciuta.

Ho quindi lavorato sulla semplificazione del linguaggio, accompagnando le spiegazioni con immagini, schemi e parole chiave tradotte, quando necessario. La collaborazione tra gli studenti stessi si è rivelata preziosa: alcuni di loro, più fluenti in italiano, hanno aiutato i compagni a comprendere meglio i concetti.

Uno degli aspetti più affascinanti di questa esperienza è stato scoprire quanto la diversità culturale possa arricchire il processo educativo. Durante le lezioni, ho spesso incoraggiato gli studenti a condividere conoscenze legate alle loro tradizioni, trovando punti di contatto tra i contenuti scientifici e i loro contesti culturali.

Ad esempio, discutendo di scienze, abbiamo esplorato le piante utilizzate nelle loro terre d'origine per scopi medicinali, rendendo l'apprendimento più rilevante e coinvolgente. Ma anche nello studio della matematica si sono sentiti accomunati, perché il conto alla cassa di un supermarket è la somma del costo dei prodotti messi nel carrello, e tutti gli studenti fanno la spesa!

Inoltre, mi sono trovata a svolgere un ruolo importante di supporto psicologico e motivazionale. Molti studenti, infatti, affrontano difficoltà legate a situazioni di precarietà economica, sociale o emotiva, per questo ho cercato di creare un ambiente accogliente e confortevole, dove ogni individuo si sentisse rispettato, valorizzato e accettato. Attraverso il dialogo e l'empatia, ho lavorato per costruire un rapporto di fiducia, consapevole che solo un ambiente sereno può favorire l'apprendimento.

Tra i momenti più gratificanti ci sono stati quelli in cui ho visto gli studenti acquisire fiducia nelle loro capacità e desiderio di realizzazione personale. Ricordo un allievo che inizialmente trovava insormontabile il calcolo matematico di base. Dopo settimane di lavoro paziente e costante, la sua espressione di soddisfazione al superamento di un esercizio complesso è stata per me una conferma del valore di questo percorso.

Particolarmente rilevante è stata anche l'esperienza in seno ai percorsi PNRR-STEM. È stata sperimentata la capacità dei discenti di collaborare alla realizzazione di un robottino con materiali di riciclo pilotato dal microcontrollore Arduino Uno per l'accensione di due led che costituivano gli occhi dello stesso.



La testa del robottino è stata realizzata con un vasetto di yogurt, gli alloggiamenti per i led con i tappi antigocce delle bibite energetiche, mentre per la pancia è stato utilizzato un contenitore parallelepipedo in plastica che serviva anche da alloggiamento per il microcontrollore. Queste realizzazioni (artefatti pestalozziani) hanno trovato fondamento su tre elementi fondamentali:

- 1) **Testa (intelletto):** sviluppo cognitivo attraverso il ragionamento e l'osservazione;
 - 2) **Cuore (morale ed emozioni):** educazione ai valori e alla sensibilità;
 - 3) **Mano (pratica):** apprendimento attraverso il lavoro manuale e l'esperienza diretta.
- Insegnare in un contesto multiculturale come questo mi ha permesso di sviluppare competenze non solo didattiche, ma anche relazionali e interculturali, utilizzando molta flessibilità, passione, pazienza e capacità di adattamento.

Questa esperienza mi ha arricchito profondamente, offrendomi la possibilità di contribuire, anche in minima parte, al percorso di integrazione e crescita di queste persone.

Il genio della matematica

Liberamente ispirato al grande matematico napoletano Renato Caccioppoli

a cura di

Filomena Carrella

Giornalista, pianista, scrittrice, autrice di opere teatrali.

*Vincitrice nel 1997 del Premio Internazionale di Poesia e Letteratura
(Istituto Italiano di Cultura)*

“Il quadrato non è il rettangolo e il rettangolo non è il quadrato. Il quadrato ha quattro lati, ed il rettangolo ha... pure quattro lati!”

Tira un fiato e proseguendo nella sua passeggiata pomeridiana e sempre senza essere molto convinto di ciò che ha appreso la mattina, Renato sfiduciato, ammette: “Hanno quattro lati tutti e due, solo che uno è ‘chiatto’, Madonna mia, e l’altro è ‘secco’ Cristo Santo. Quest’è!”.

Sospira profondamente mentre si siede su un grosso sasso, il suo migliore amico, e continuando nei suoi discorsi confessa:

“Però, sarà difficile la matematica, sarà che a volte non ci capisco niente, ma Artù (riferendosi alla grossa pietra, accarezzandola con una mano) quant’è bella la professoressa!”

Sorride tra sé contemplando la fattoria in cui vive da quando è nato e tra l’uomo che inizia a nascere ed il bambino che quasi l’abbandona, afferma:

“Se solo avessi dieci anni in più... ti giuro, me la sposerei! È bella, è buona e... mi ha fatto diventare un matematico. Anzi, sai la verità? Tutta la scuola studia matematica!”

Non ha con sé un fazzoletto, ha il naso che gli cola.

È ancora freddo, anche se non è una di quelle giornate che fanno rabbrivire la pelle.

È secca e fresca l’aria, ed il sole lievemente riscalda e bacia lo scenario naturale.

Renato è un bel ragazzotto, di quelli fatti bene, e purtroppo sta facendo i conti con la sua prima cotta.

Si strofina il polso del giubbotto sotto il naso e continua:

“Maria mi scrive le lettere e me le invia per Emilio, Girella mi strizza i suoi occhioni blu, Valeria mi conserva le barrette di cioccolato, per non parlare di Valentina, che ogni mattina compra (sospirando) due lecca-lecca. Ma Artù, sai che ti dico?

Nooooooooooooo (gridando a squarciagola, quasi come se volesse farsi sentire per tutta la fattoria), non mi piacciono, non mi piacciono!

Sono piccole streghe! Io... (quasi calmandosi e come in preda ad un'allucinazione) inventerò un sistema di numeri naturali con numeri razionali, affinché la mia prof. rimanga giovane com'è, per aspettare me, che diventi uomo.

Ah... Artù che bella pensata!

Ora sì che sono più contento... sì, sì, studierò, qualcosa troverò... dovrà rimanere giovane per aspettare me!”

Fiducioso e rallegrato salta su dalla pietra, inizia a giocare con Rex, il suo cane, strapazzandolo, tirandogli le orecchie e cantando:

“Se Eratòstene scriveva i numeri primi, io scriverò i numeri d'amore!”

Che cuore, che gioia: la matematica per Renato ora era tutto. “Mamma, è pronta la matematica? Cioè, scusa, volevo dire la merenda?”

Con la voce più squillante di una tromba, “ho una fame da radice quadrata, no, da re Artù, perché voglio crescere per capire l'algebra, la geometria, diventare bello, matematico, oppure re, famoso, perché...”

La mamma, sorridendogli, canzona:

“Perché vuoi sposare una principessa?”

Quasi divertita, mentre lui serio, serio controbatte:

“Una principessa!? Nooooooooo!!! Sono tutte sognatrici le principesse. No! Voglio sposare una donna intelligente!”

“Ma no!” Esclama la mamma radiosa in viso, quasi come al pensiero che fosse lei e quindi proseguendo: “e chi per esempio?”

Lui come in sogno, sbirciando tra le mille brioches farcite di nutella o marmellata, risponde:

“Una bella professoressa mamma, una bella professoressa!” “Però!”

Risponde la mamma tra la meraviglia e la delusione. “Una” farcendosi la bocca di crema “pro-fes-so-reeessaaaaa!”.

Così ogni giorno per Renato il pensiero è sempre lo stesso: inventare una soluzione, che faccia rimanere giovane la sua prof.! Certe volte è quasi avvilito da questa storia. Sono passati diversi mesi e tra studi di algebra, aritmetica, geometria e scienza, non è riuscito a trarre un aiuto per il suo caso.

A scuola i suoi occhi non sono che per lei: cerca sempre di poterla osservare, anche quando non è nella sua classe.

Che tristezza quando suona quella campanella, un pomeriggio e una notte senza vederla.

Non parliamo poi del suo giorno libero, o della domenica: per Renato non c'è tristezza o castigo peggiore.

“Signora Caccioppoli, complimenti: il suo bambino è un modello. Un genio, soprattutto in matematica. Ha intensificato gli studi in modo sorprendente, facendolo con passione!”

“Grazie, come mi rallegra tutto ciò!”

Commentò la mamma a colloquio con i professori, e lieta e fiduciosa, tornò a casa con la voglia di premiare il suo ragazzo comprandogli una bella bicicletta.

“Certo è una bellissima idea” rispose il marito, quando lei gli confidò questo pensiero.

“Anzi sai cosa faccio? Domani stesso andrò a comprargliela: una di quelle belle, tutte colorate, davvero da far invidia!”

La bicicletta arrivò, ma non portò nel cuore di Renato quella felicità a cui anelava.

“Artù” sospirando alla pietra in una delle sue tante confessioni pomeridiane “oggi era ancora più bella. Aveva tutti i capelli sciolti, lunghi e biondi, che le coprivano le spalle e poi... era vestita di tanti colori. Ti giuro... l'avrei voluta proprio toccare, sì, sfiorarla, cioè poggiare una mano sulla spalla, nei capelli, per rendermi conto che è vera.

Certe volte, mi sembra di sognare. Poi sai, sono disperato: studia, studia e studia, ma ancora non ho trovato nulla per il mio piano! Oggi... era come una bambola!

Anzi, come una fata!”

Così, scoraggiato, si alza dalla pietra e prosegue nel suo percorso. “Ho trovato” affermò a se stesso un pomeriggio in cui sempre più disperato vagava per i sentieri che circondavano l’immensa e popolata fattoria, “ho trovato, scriverò al mago Babbà.

Lui sì che sarà in grado di prepararmi un filtro magico. Dove la matematica non arriva, lascia il passo alla magia!” Saltando e correndo poi cantava:

“Il cerchio è tondo, il quadrato è ‘chiatto’, il triangolo è un fesso e la matematica è la materia più bella che io possa imparare!”

La lettera al mago Babbà arrivò, e questi giustamente tenne in considerazione la serietà del messaggio.

Con modi dolci e delicati, rispose al piccolo Renato, facendogli capire l’impossibilità di ciò che chiedeva.

“Che inutile mago!”

Piangendo urlava dopo aver letto la lettera.

“Artù, capisci” sempre rivolto alla pietra “e si fa chiamare pure mago.

Ma quello è un salame, ecco cos’è, né uomo, né animale e né mago, ma un salame!”

Disperato piangeva e si lamentava.

Lo stato di depressione prese il sopravvento su Renato.

Subentrò una fortissima febbre, che lo mantenne inchiodato al letto per 15 giorni. Gli amici si davano da fare per non lasciarlo mai solo, ma lui era sempre più triste, fin quando un giorno al suo capezzale apparve l’adorata prof. Renato rinacque! La febbre, la depressione, tutto svanì.

La prof. intanto aveva ricevuto una lettera dal mago Babbà e da allora iniziò una magica relazione tra lei ed il mago.

Seppe di questo amore di Caccioppoli per lei e si recò a casa per parlargli.

Amorevolmente, mentre gli stava vicino, gli confidò:

“Caccioppoli, il tempo non è matematica o scienza, e dire che io ho 30 anni e tu 12, è una constatazione, è la realtà della vita. Non possiamo aggrapparci a favole, a superstizioni o a poteri occulti. Devi essere contento invece di scoprirti così uomo e di sapere con precisione quanto ti piacciono le donne.

Ti ringrazio per aver scelto me e la promessa che ti farò è che il mio primo bambino se sarà maschietto si chiamerà come te, e se femminuccia il nome lo sceglierai tu, anche perché devo a te questa mia grande gioia!”

Lo baciò affettuosamente sulla guancia, mentre Renato continuava a non capire, ripetendo tra sé:

“Deve a me la sua gioia, e perché?”

Immerso in questa riflessione vide all'improvviso dalla porta della sua camera da letto, tra l'addizione e la moltiplicazione bloccando il fiato nella sottrazione e divisione il mago Babbà! Entrò accompagnato da uno strascico di stupore, da parte di tutte le persone che abitavano nella fattoria.

Renato ora si sentiva una parentesi, tra il sogno ed il vero.

La sua amatissima prof. vicino al letto, il mago Babbà che aveva sì definito un salame, ma sempre un fascino da personaggio favoloso esercitava e quindi lui stava diventando un quesito di aritmetica, alla ricerca del risultato.

“Cubo al quadrato” pronunciò sottovoce “ma forse ho sbagliato qualche calcolo?”

“No, non hai sbagliato nulla” sorridendo ed avvicinandosi, il mago gli disse “è che grazie a te, oggi posso sposare una donna bella ed intelligente!”

Estrasse poi un piccolo libro e glielo porse.

Renato aveva le lacrime in esuberanza: era sì felice, ma comunque molto geloso, così mentre cercava di leggere il titolo del libro la sua stanzetta diventava sempre più al quadrato, o pardon al triplo di compagni, che entrando recavano tra le mani un regalo e sottovoce bisbigliavano:

“Grazie a Caccioppoli c'è il mago, e non è una finzione, anzi tra poco arrivano anche i giornalisti della televisione”.

Così continuavano tra stupore e gioia i loro commenti.

Le lacrime fuoriuscivano sul volto di Renato, mentre tentando di abbozzare un mezzo sorriso e nel dire grazie, aveva letto il titolo del libro: “I piccoli uomini crescono!”

Aritmetica o geometria?

Numeri o punti di linea?

Si strofinò il naso con il polsino del pigiama e per consolarsi, riflettendo, esclamò: “Voglio una fotografia con il mago e la prof. stampata su tutti i giornali!” Tutti risero ed applaudirono, mentre lui tra pianti e sorrisi, si sentiva come un re, anzi superiore a re Artù, ma che dire, forse un Giove!

Va be’ non ricordava molto di quella materia, forse perché la prof. non gli piaceva poi tanto!

Ma della matematica se ne fece un vanto, anzi divenne un vero genio!

Giochi Matematici per la Scuola – Premio “Aldo Morelli”

Quattro anni di osservazione alla scuola primaria

Analisi e riflessioni sulle difficoltà emerse²

a cura di

Giusy Annamaria Cappuccio

IC “G. Genoino” Frattamaggiore (Na)

I Giochi Matematici per la Scuola in onore del prof. Aldo Morelli³ rappresentano un’occasione importante per avvicinare gli studenti alla matematica in modo dinamico e coinvolgente; essi sono potenti strumenti educativi, poiché da un lato favoriscono lo sviluppo delle competenze matematiche e dall’altro, come tutte le esperienze che richiedono azione, giudizio e iniziativa, promuovono la crescita personale, sociale e motivazionale degli alunni.

In qualità di referente dei Giochi per la scuola primaria dell’istituto comprensivo in cui lavoro, ho seguito lo svolgimento delle diverse fasi della gara con le classi quarte e quinte di due cicli differenti (ossia per quattro edizioni) e ho potuto osservare gli alunni cimentarsi con le diverse prove, il che mi ha dato la possibilità di riflettere sulle difficoltà che ho visto emergere di volta in volta e di cui in questa sede cercherò di dare un’esposizione per quanto sommaria.

Nonostante i dati e le considerazioni qui esposti siano relativi alle performances di un numero limitato di alunni - circa 100 ogni anno -, di una piccola realtà scolastica e di uno specifico target di studenti, alcune valutazioni e osservazioni possono essere estese ad un contesto più ampio e riguardare non esclusivamente la disciplina matematica.

Difficoltà di natura linguistica, cognitiva e metacognitiva

Le difficoltà riscontrate si sono evinte specificatamente in alcune aree tematiche, quali:

² Si ringrazia la prof.ssa Nicla Palladino per le percentuali che nel testo ricorrono, relative perlopiù ai risultati della I fase dei Giochi Matematici del 2022, e con la quale più volte nel corso di questi anni mi sono confrontata in merito ad essi. Va sottolineato che la scelta di utilizzare principalmente i risultati dell’anno 2022 non è riduttiva ai fini dell’analisi, in quanto i quesiti proposti in ogni edizione sono sempre della stessa tipologia così come le difficoltà riscontrate durante le quattro edizioni.

³ Da diciotto anni l’Associazione Mathesis “Mathemare” di Castellammare di Stabia, in collaborazione con l’Associazione Mathesis “Aldo Morelli” di Napoli, organizza e promuove questa sfida strutturata e ludica, articolata in tre fasi (promozionale, selettiva e finale), in cui gli alunni si cimentano nella risoluzione di quesiti a risposta multipla di logica, matematica e geometria; a conclusione di essa si tiene il convegno “Studenti in cattedra, docenti nei banchi”, che offre agli studenti e ai docenti la possibilità di esporre su temi scelti e attività svolte o di presentare lavori scientifici. Ai Giochi possono partecipare tutte le scuole primarie e secondarie di I e II grado del territorio nazionale.

- 1- i problemi parola e le situazioni problema
- 2- la geometria e la rappresentazione spaziale
- 3- la misura e conversione

Esse vanno oltre le competenze puramente matematiche e sono riconducibili a problematiche interconnesse di ordine linguistico, cognitivo e metalinguistico, in quanto principalmente legate alla difficoltà di lettura e comprensione dell'enunciato e alla mancanza di un approccio logico e strategico nella risoluzione dei problemi.⁴

Molti studenti non comprendono appieno le domande, non possiedono il lessico tecnico, non conoscono o riconoscono adeguatamente la simbologia convenzionale e non gestiscono le frasi complesse.⁵

Alla prima delle problematiche sopra richiamate afferiscono quesiti concernenti, a titolo esemplificativo, il tema dell'uguaglianza, quali ad esempio i seguenti:⁶

- a) *Che valore deve assumere il simbolo $\square$ perché la seguente uguaglianza sia vera?*

$$25 \times \square = 65 + 25 + 10$$

- b) *Che valore deve assumere il $\square$ perché la seguente uguaglianza sia vera?*

$$49 + 4 \times \square = 22 \times 2 + 25 + 24$$

La maggior parte degli alunni ha preferito non rispondere o tentare la sorte, non avendo compreso di trovarsi di fronte ad un esercizio ordinario, ma posto in maniera diversa, ossia di dover sostituire il simbolo proposto con il numero idoneo per risolvere

⁴ In ambito educativo la competenza è “la capacità di far fronte ad un compito, o ad un insieme di compiti (dimensione operativa), riuscendo a mettere in moto e a orchestrare (attivazione e organizzazione) le proprie risorse interne, cognitive, affettive e volitive (conoscenze e consapevolezza), e a utilizzare quelle esterne disponibili (dimensione strategica e contesto) in modo coerente e fecondo (regolazione del processo)” (Pellerey, 2004, p. 12); in senso lato e in vista di un apprendimento permanente la competenza è “la comprovata capacità di utilizzare conoscenze, abilità e capacità personali, sociali e/o metodologiche, in situazioni di lavoro o di studio e nello sviluppo professionale e/o personale” (Commissione Europea, 2008, p. 4). Tenuto conto di queste definizioni, per problematica linguistica si intende l’incapacità alla decodifica e comprensione dell’enunciato proposto, per problematica cognitiva l’incapacità di analisi, logica e rappresentazione, per problematica metacognitiva la mancanza di consapevolezza, di controllo e di regolazione di strategie.

Per le competenze attese al termine della classe quinta della scuola primaria si veda MIUR 2025, pp. 91-92 (<https://tinyurl.com/Nuove-Indicazioni-2025>).

⁵ La comprensione del testo è una componente cruciale nella risoluzione di problemi matematici, perché senza una corretta rappresentazione mentale dell’enunciato non è possibile attivare strategie adeguate.

⁶ Si tratta del quesito n. 5 della I fase dei Giochi Matematici dell’anno 2002 e del n. 7 della I fase di quelli dell’anno 2023. Da questo momento in poi si abbrevierà il riferimento ai quesiti citati nel testo, indicando il numero, la fase e l’anno.

l'operazione in modo che il risultato ottenuto nel primo membro dell'uguaglianza fosse uguale a quello del secondo.

Dunque, non vi è stata decodifica né flessibilità e prova ne è il fatto che, durante la fase di revisione e spiegazione degli errori commessi, lo stesso quesito, presentato nella consueta e semplificata veste, è stato “riconosciuto” come compito noto e, quindi, risolto.

Situazione analoga si è presentata con il quesito⁷

c) *Quale delle seguenti uguaglianze è vera?*

$$10/4 = 2,5 \quad 10/4 = 0,4 \quad 10/4 = 0,5 \quad 10/4 = 1,5 \quad 10/4 = 1,4$$

dove un innocente slash, utilizzato in luogo della linea di frazione, ha sviato gli alunni dall'individuare una semplice frazione ed è stato inconsapevole colpevole del 90% di risposte errate. L'interrogativo riproposto successivamente a tutti gli studenti, durante la fase dedicata alle riflessioni sulle risposte date o mancate, e presentato in modalità usuale, ossia con la linea di frazione, è stato compreso e risolto correttamente tra l'imbarazzo e lo sconcerto degli stessi alunni che hanno confessato che a confonderli era stata la sconosciuta e misera barra.

Strettamente collegata alla difficoltà di interpretazione dell'item, si rileva essere la carenza nello sviluppo di un pensiero logico-strategico, che compromette la capacità di comprendere e applicare i concetti matematici proposti.

Sebbene gli studenti abbiano una discreta conoscenza teorica delle operazioni di base - come sommare, sottrarre, moltiplicare e dividere - faticano a trasferire queste conoscenze in contesti complessi o applicativi, in particolar modo nel campo geometrico e della rappresentazione spaziale (area tematica 2).

Ad esempio, solo il 30% degli alunni ha risposto correttamente al quesito:⁸

⁷ Quesito n. 12 della I fase anno 2022.

⁸ Quesito n. 4 I fase anno 2022.

- d) *Paolo deve recintare il suo giardino di forma rettangolare con del nastro. Le dimensioni sono di 16,5 m e 8,5 m, la porta è larga 1,5 m. Quanto nastro deve comprare?*

Lo stesso problema, presentato durante le lezioni a tutti gli alunni intervenuti alla prova per rivedere quanto fatto e posto in maniera consueta e semplificata -

“Calcola il perimetro di un rettangolo che ha il lato maggiore di 16,5 m e quello minore di 8,5 m” -

è stato risolto da tutti, perché conforme al formulario abitudinario.

Lo stesso limite si è evidenziato in tutti gli item, che, come questo, proponevano situazioni-problema, in cui l'ostacolo maggiore è stato tradurre un problema verbale in un'operazione matematica concreta.

Per fare un altro esempio:⁹

- e) *Luca ha acquistato una moto che costa € 3.430. Versa un acconto di € 830 e decide di pagare il resto in 10 rate mensili. Quale sarà il valore di ogni rata?*

Appena poco più del 25% degli alunni ha risposto correttamente.

Dall'analisi della percentuale degli errori commessi e delle risposte date o meno, si è evinta mancanza di attenzione e pianificazione, come è palese anche nel seguente quesito:¹⁰

- f) *Un corridore percorre 2,3 km in un giro di pista. Quanti metri percorre dopo 4 giri?*

al quale solo il 20% degli alunni ha selezionato la risposta corretta, 9200 m, e ben il 45% ha optato per la risposta 9,2 m, avendo chiaramente mancato il passaggio della conversione della misura (area tematica 3).

Si può, pertanto, convenire da quanto finora esposto che effettivamente le difficoltà degli alunni sono dovute a incapacità di lettura e comprensione dei testi, a ignoranza o scarsa conoscenza del lessico specifico, a rigidità del *modus operandi*, a disattenzione

⁹ Quesito n. 11 I fase anno 2022.

¹⁰ Quesito n. 10 I fase anno 2022.

e disorganizzazione, tutte inabilità riconducibili con molta probabilità alla desuetudine di leggere e alla consuetudine di applicare il mero meccanismo, problematiche spesso evidenziate anche dai risultati delle prove INVALSI.¹¹

In un mondo che corre, che mostra, che misura tutto in termini di produttività e visibilità, il potere accrescitivo, educativo e formativo della lettura è trascurato dalla società e anche dalla didattica. La scuola, infatti, pur proclamandone l'importanza, finisce per ridurla a uno strumento funzionale: si legge per studiare, per rispondere alle domande, per fare l'analisi del testo. A lezione la lettura quotidiana e condivisa è bistrattata ed emarginata come attività anche dalle materie propriamente umanistiche; la pratica didattica di guidare gli alunni nella lettura e interpretazione dei testi di qualsiasi tipo, compreso quello dei problemi, è presente nei documenti di progettazione didattica, ma elusa dalla routine scolastica o, quantomeno ne è ridotta la portata, e ne è prova l'ignoranza della terminologia di settore e la rigidità del pensiero; non meno importante sarebbe anche una sana e quotidiana attività di scrittura, perché leggere - e scrivere - significa abitare le parole, riflettere sul loro significato, capirne l'uso, coglierne le sfumature di significato, farle proprie e sceglierle; sono operazioni che richiedono concentrazione, ragionamento, memorizzazione e sono azioni che favoriscono l'elasticità mentale, arricchendo il pensiero, che è alla base di qualsiasi ragionamento ed è fondamento della capacità di trovare soluzioni. Il pensiero opera attraverso le parole e più parole si conoscono, più il pensiero diviene articolato, flessibile, creativo; il pensiero è cardine di ogni azione e risoluzione.¹²

La matematica, che non è solo una questione di calcoli, rende queste debolezze più visibili e misurabili, perché si avvale di un linguaggio verbale che può risultare

¹¹ L'Istituto Nazionale per la Valutazione del Sistema di Istruzione (INVALSI), mediante prove standardizzate nazionali e coerenti con le Indicazioni Nazionali e le Linee guida, misura i livelli di competenza degli studenti delle scuole primarie e secondarie in italiano, matematica, inglese, ma indaga anche le difficoltà specifiche che gli studenti affrontano attraverso l'analisi dettagliata dei fattori che maggiormente incidono sui risultati e dei punti deboli nel sistema educativo. Per un esame attento dei risultati delle prove INVALSI si veda <https://tinyurl.com/Risultati-INVALSI>.

Per le competenze oggetto di valutazione da parte dell'Istituto si veda <https://tinyurl.com/Competenze-INVALSI>.

Sulle difficoltà linguistiche che gli studenti incontrano nella risoluzione dei quesiti INVALSI della dimensione risolvere problemi, su quali difficoltà emergono nella scuola primaria e su come queste si sviluppano o si modificano nel passaggio dalla classe seconda alla classe quinta si veda Capone, R., Lemmo, A., & Filiberti, F. (2021).

Sulle difficoltà di lettura e comprensione evinte dall'analisi dei risultati delle prove INVALSI cfr. Morlini, M., & Gatti, M. (2010).

ambiguo e complesso e perché richiede necessariamente logica, problem solving, capacità di generalizzare concetti e memoria verbale e visuo-spaziale; esse, tuttavia, emergono in modo meno percepibile anche nelle altre discipline - che pure necessitano di analisi, deduzione e sintesi – nelle quali si palesano principalmente nell’incapacità ad argomentare e a cogliere i nessi di causa-effetto.¹³

L’applicazione del mero meccanismo senza la dovuta assimilazione del processo che sta a monte, senza la giusta riflessione sul procedimento che ha portato alla sua formulazione e senza l’analisi del suo perché e della sua finalità¹⁴ determina una semplice e passiva applicazione della regola, che viene impiegata in maniera automatica e perlopiù in contesti noti, come si è evinto dalle esemplificazioni su riportate. Gli alunni sono ben preparati in termini di conoscenze tecniche, ma meno nell’applicazione di queste in situazioni complesse e reali e non sono avvezzi a formulare ipotesi e usare strategie efficaci per risolvere i problemi.

La rigidità di pensiero è speculare alla rigida suddivisione delle sfere del sapere in discipline, tra le quali la matematica è vista come una materia a sé stante, distinta anche dalla geometria¹⁵ e lontana dall’italiano.¹⁶ L’apprendimento e l’insegnamento avvengono per compartimenti stagni, anche se è declamata l’interdisciplinarità, e gli studenti utilizzano in maniera settoriale le proprie competenze, ad esempio, non soffermandosi su una lettura attenta del problema o sulla sua analisi e logica.

¹³ Le Nuove Indicazioni 2025 dedicano all’importanza della scrittura il paragrafo “Scrivere è...vivere. E si apprende a scuola”, in cui si afferma che “la scrittura è molto più che una tecnologia della parola: è saper strutturare il pensiero in un orizzonte di senso che è anche introspezione, cura di sé. Ed è avviamento al pensiero riflessivo. Scrivere mette, inoltre, in discussione il mito della velocità: richiede silenzio, concentrazione, lentezza. Non si scrive solo per essere capiti; a scuola si scrive per capire. Per questo la didattica della scrittura assume un ruolo cruciale sin dalla scuola del primo ciclo.” (MIUR 2025, p. 13).

¹³ Si rileva la carenza di argomentazione e di lettura inferenziale. Nella produzione scritta o orale, gli alunni spesso faticano a motivare le proprie affermazioni o a cogliere i collegamenti logici tra causa ed effetto. In storia, ad esempio, emergono difficoltà nel comprendere le relazioni tra eventi; in scienze, prevale una descrizione meccanica dei fenomeni, priva di interpretazione complessiva; in italiano, l’approccio risulta superficiale, perché l’attenzione si concentra sul ricordare le parole del testo. Molti alunni memorizzano passivamente i contenuti, inclusi i titoli, poiché spesso anche nelle materie orali si insiste su un uso rigido del libro con un’impostazione didattica che lo privilegia come unica fonte di sapere, a scapito della riflessione personale, dell’argomentazione autonoma e del dialogo.

¹⁴ L’alunno necessita di comprendere il senso pratico e l’utilità concreta di ciò che gli viene presentato o proposto, per poter attribuire significato agli apprendimenti. Anche in ambito diverso da quello matematico, quando le domande sono poste in modo non convenzionale, spesso non si ottiene una risposta pertinente.

¹⁵ La geometria è percepita dagli alunni come una materia indipendente dalla matematica, con cui, invece, condivide basi comuni.

¹⁶ In realtà, la matematica – al pari dell’italiano – è un linguaggio: un codice che utilizza cifre e simboli per rappresentare e comunicare il pensiero umano.

Difficoltà di natura emotivo-comportamentale

A queste difficoltà si aggiungono problematiche di natura emotivo-comportamentale:

- 1- ansia da prestazione e incapacità nel gestire le emozioni
- 2- scarsa motivazione
- 3- scarsa considerazione del tempo

La paura di sbagliare condiziona la prestazione degli alunni - in questo tipo di prove come in altre - e su di essa incide negativamente anche l'approccio degli studenti alla matematica, percepita come disciplina esatta e infallibile, motivo per il quale si vive spesso un forte senso di inadeguatezza e il timore di fallire o di essere incapaci nel risolvere i problemi proposti pregiudica la prova. L'incapacità di gran parte degli alunni di gestire le emozioni è - sembrerà strano - l'ostacolo che si è maggiormente manifestato in coloro definiti "i bravi, i cavalli vincenti"; essi sentono spesso la pressione delle aspettative da non deludere dei genitori e/o degli insegnanti o affrontano queste prove con l'arroganza e la presunzione di chi è ritenuto infallibile e ha un'idea del proprio io perfetta, che non ammette nei. La motivazione, in questo caso, è forte ed estrinseca ed è accompagnata da una bassa tolleranza al fallimento; eppure la sperimentazione dei successi e dei fallimenti è basilare, soprattutto nella fascia d'età 9-14, per sviluppare l'identità personale e la resilienza emotiva, pietre miliari del vivere sociale. Al contrario, gli alunni etichettati come "non bravi e svogliati" risentono meno la pressione della competizione e a volte riportano risultati inaspettati, perché, non avendo nulla da dimostrare e nulla da perdere, vivono con più serenità le prove e trovano soluzioni, pur avendo meno conoscenze teoriche. Ad esempio, durante una fase intermedia finalizzata a stabilire quale tra i candidati classificatisi ex aequo potesse accedere alla II fase alla domanda

“Nel 2013, il primo maggio era mercoledì. Nel mese di maggio 2013 ci sono state quattro domeniche. Scrivi le date delle quattro domeniche del mese di maggio 2013”

ha risposto correttamente solo un alunno tra i quattro partecipanti, usando il tempo a disposizione per segnare su carta tutti i giorni del mese indicato e rintracciando così le date richieste; lo stesso alunno, peraltro con Piano Didattico Personalizzato, ha trovato strategie per risolvere anche altri quesiti, sbagliati o omessi dagli altri, e ha superato la prova.¹⁷

Corollario e concausa di questi fattori di disagio è il disinteresse di alcuni studenti, che seppur trovino i giochi stimolanti, si mostrano apatici e indifferenti e così affrontano la prova in modalità accelerata e superficiale, con frustrazione e ansia. Le ragioni possono essere varie e sono sempre collegate tra loro e con quanto finora esposto: esperienze scolastiche negative, avversione a una materia considerata astratta e distante dalla realtà quotidiana, dedizione a competizioni di altro tipo – come quelle presenti nei videogiochi - e incomprensione del senso e dell'utilità di questo tipo di prove.¹⁸

Ma tra tutte le evidenze fin qui riportate forse la più significativa è che molti studenti tendono ad affrettare le risposte o a terminare la prova troppo presto, mostrandosi impazienti e inconsapevoli dell'importanza del tempo e della sua gestione, non apprezzando e valorizzando il tempo che hanno a disposizione. Ciò è dovuto sia all'ansia da prestazione succitata, sia alla mancanza di consapevolezza della preziosità del tempo, sia alla sottovalutazione della prova, sia alla poca abitudine a lavorare con tempi prestabiliti. Il tempo è un fido alleato per riflettere con calma, per rivedere quanto fatto e anche per calcolare approssimativamente le probabilità di riuscita della prova stessa; la sua gestione è una competenza che va insegnata e allenata, così come il suo valore. Del resto, bisogna anche considerare che gli alunni, come tutti quanti noi, assorbono ciò che vivono in questo correre continuo sociale e sono sollecitati particolarmente dai videogiochi e dai social - a cui dedicano tempo - a un fare veloce, vittorioso, in cui la competizione c'è, ma è finalizzata alla supremazia e al trionfo dell'ego.

¹⁷ I Giochi Matematici si sono rivelati uno strumento utile anche per la rimodulazione del PDP e per una revisione della valutazione dell'alunno. Hanno offerto un feedback prezioso sulla pianificazione degli interventi e messo in luce che, in alcuni casi, la valutazione si focalizza sulle conoscenze, trascurando competenze trasversali come il problem solving.

¹⁸ *Supra* nota 13 p. 5.

Quali sono le strategie didattiche da mettere in atto?

Queste osservazioni, se da un lato evidenziano le criticità della didattica attuale, dall'altro spingono a riflettere sulle possibili strategie didattiche da mettere in atto.

È tuttavia opportuno precisare che le difficoltà emerse non sono imputabili unicamente a scelte o approcci didattici talvolta non pienamente rispondenti alle esigenze degli alunni. Esse affondano le radici anche in dinamiche sociali e culturali più ampie, che influenzano in maniera significativa l'esperienza scolastica. I modelli comunicativi dominanti, la velocità con cui vengono processate le informazioni nella società digitale, la frammentazione dell'attenzione, la scarsa esposizione alla lettura e all'ascolto riflessivo, così come le pressioni legate alla performance, contribuiscono a modellare atteggiamenti e competenze cognitive, emotive e relazionali; pertanto, è necessario riconoscere il legame profondo tra apprendimento e ambiente culturale.

Per rispondere in modo efficace alle difficoltà riscontrate è dunque auspicabile un'azione educativa sistemica e condivisa, ovvero un approccio didattico che consideri tutti gli educatori del contesto formativo, tenga conto della complessità dei fattori in gioco e promuova percorsi formativi coerenti con le sfide del nostro tempo.

Nel prossimo contributo si proporranno azioni concrete e strategie didattiche per affrontare tali criticità.

Bibliografia

Baldascino, R. (2011). *LIM. Ambienti Integrati di Apprendimento. Costruire contesti per sviluppare competenze*. Napoli: Tecnodid

Capone, R., Lemmo, A., & Filiberti, F. (2021). *I problemi verbali e il valore predittivo delle prove INVALSI*. In G. Anichini, P. Dalle Pezze, M. Ferrari & L. Lucangeli (a cura di), *I dati INVALSI come strumento per migliorare la didattica della matematica nella scuola primaria* (pp. 100-121). Franco Angeli
<https://tinyurl.com/Problemi-verbali-prove-INVALSI>

Castoldi, M. (2011). *Progettare per competenze. Percorsi e strumenti*. Roma: Carocci

Castoldi, M. (2021). *Valutare gli apprendimenti nella scuola primaria*. Roma: Carocci

Castoldi, M. (2024). *Promuovere la comprensione in classe. Repertorio ragionato di strategie didattiche*. Roma: Carocci

Morlini, M., & Gatti, M. (2010). *Difficoltà di lettura e comprensione: Analisi dei risultati delle prove INVALSI*. INVALSI.

Pellerey, M. (2004). *Le competenze individuali e il portfolio*. Roma: La Nuova Italia

Rapporto INVALSI. (2019). *Speciale Rapporto INVALSI 2019*
Una panoramica sui risultati del campione. INVALSI

<https://tinyurl.com/rapporto-INVALSI-2019>

Raimo, C. (2017). *Tutti i banchi sono uguali. La scuola e l'uguaglianza che non c'è*. Torino: Einaudi

Ranieri, M. (2022). *Competenze digitali per insegnare*. Roma: Carocci

Recalcati, M. (2014). *L'ora di lezione. Per un'erotica dell'insegnamento*. Torino: Einaudi

Siegel, D. J. (2012). *La mente relazionale*. Milano: Raffaello Cortina Editore

Normativa scolastica e contributi

Commissione Europea (2006). *RACCOMANDAZIONE DEL PARLAMENTO EUROPEO E DEL CONSIGLIO del 18 dicembre 2006 relativa a competenze chiave per l'apprendimento permanente*. Gazzetta ufficiale dell'Unione europea (30/12/2006)

Commissione Europea (2008). *RACCOMANDAZIONE DEL PARLAMENTO EUROPEO E DEL CONSIGLIO del 23 aprile 2008 sulla costituzione del Quadro europeo delle qualifiche per l'apprendimento permanente*. Gazzetta ufficiale dell'Unione europea (06/05/2008)

Council Recommendation (2017). *Council Recommendation of 22 May 2017 on the European Qualifications Framework for lifelong learning and repealing the recommendation of the European Parliament and of the Council of 23 April 2008 on the establishment of the European Qualifications Framework for lifelong learning*. Official Journal of the European Union (15/06/2017)

Commissione Europea (2018). *RACCOMANDAZIONE DEL CONSIGLIO del 22 maggio 2018 relativa alle competenze chiave per l'apprendimento permanente*. Gazzetta ufficiale dell'Unione europea (04/06/2018)

OECD (2019). *OECD Future of Education and Skills 2030 OECD Learning Compass 2030 A series of concept notes*

MIUR (2025). *Nuove Indicazioni 2025 Scuola dell'infanzia e Primo ciclo di istruzione Materiali per il dibattito pubblico*
<https://tinyurl.com/Nuove-Indicazioni-2025>

Giochi Matematici per la Scuola – Premio “Aldo Morelli”
Quattro anni di osservazione alla scuola primaria
Proposte operative¹⁹

a cura di
Giusy Annamaria Cappuccio
IC “G. Genoino” Frattamaggiore (Na)

*Dopo aver analizzato le principali criticità emerse durante le quattro edizioni dei Giochi Matematici, questo articolo si concentra sulle strategie didattiche e organizzative che possono supportare gli alunni nel superamento delle difficoltà evidenziate.*²⁰

Sulla base della mia esperienza professionale, ho potuto osservare come determinate strategie risultino particolarmente efficaci nel rispondere alle problematiche evinte.

Comprensione del testo e difficoltà linguistiche

Le difficoltà di lettura e comprensione dell’enunciato possono essere ridotte, se non superate, con attività di logica linguistica. Attraverso queste attività gli studenti tra istruzioni e informazioni, tra ciò che bisogna fare e il modo in cui farlo, guidati alla lettura e decodifica di cosa viene richiesto, alla distinzione tra informazioni primarie e secondarie, vengono allenati a ragionare sulle parole e con le parole. È proficuo anche abituare gli alunni alla lettura quotidiana e condivisa di un testo, meglio ancora di libri, scelti di volta in volta dal gruppo-classe. Anche la produzione scritta deve rientrare nella pratica didattica quotidiana, poiché scrivere, anche solo un pensiero al giorno, vuol dire pensare, riflettere, ideare, scegliere, analizzare, pianificare, motivare, tutte

¹⁹ Si ringrazia la prof.ssa Nicla Palladino per le percentuali che nel testo ricorrono, relative perlopiù ai risultati della I fase dei Giochi Matematici del 2022, e con la quale più volte nel corso di questi anni mi sono confrontata in merito ad essi. Va sottolineato che la scelta di utilizzare principalmente i risultati dell’anno 2022 non è riduttiva ai fini dell’analisi, in quanto i quesiti proposti in ogni edizione sono sempre della stessa tipologia così come le difficoltà riscontrate durante le quattro edizioni.

²⁰ Si veda contributo precedente

azioni che stimolano la creatività e il giudizio critico, ma predispongono anche al benessere interiore e alla lentezza.²¹ La lettura e la scrittura sono attività, da inserire nella routine quotidiana, a cui gli alunni devono essere assuefatti fin da piccoli, già dalla scuola dell'infanzia con l'ascolto di storie, conversazioni guidate e produzione di disegni liberi o a tema.²² Durante le lezioni bisogna abituare la classe ad un eloquio ricco e forbito e alla varietà linguistica, adoperando sinonimi e contrari, registri stilistici diversi, ponendo l'attenzione soprattutto sui termini specifici e favorendo conversazioni guidate, per spronare l'esposizione orale - che pure presuppone la consequenzialità logica - e mantenere viva l'attenzione.

Sviluppo delle abilità trasversali attraverso il gioco

Le abilità trasversali, come il pensiero logico, la capacità di osservazione, il problem solving e la strategia possono essere promossi da attività creative quali l'enigmistica, il sudoku, la pixel-art, i puzzle logici, gli origami, i tangram, veri e propri allenamenti mentali da inserire regolarmente nel contesto scolastico. L'enigmistica, per esempio, aiuta ad ampliare il vocabolario, rafforza la memoria, sviluppa l'attenzione ai dettagli, stimola la comprensione linguistica. I sudoku allenano il pensiero matematico, l'ordine mentale e la gestione delle sequenze. La pixel-art combina arte e logica in attività che potenziano la pianificazione strategica oltre a sviluppare la creatività. I puzzle logici potenziano la concentrazione, avviano al concetto di incognita e sviluppano lo spirito critico. Gli origami insegnano la precisione, la sequenzialità, la pazienza, l'esecuzione di istruzioni, sviluppano la lettura non verbale e sono perfetti per assimilare la geometria e i concetti di simmetria e traslazione. I tangram sviluppano la visione spaziale, la creatività geometrica, la capacità di composizione e scomposizione e stimolano il pensiero divergente e la flessibilità mentale. Le lezioni devono essere intese come dei veri e propri laboratori, nel senso etimologico della parola, ossia dei luoghi dove esercitare il fare: tanta pratica di quanto illustrato, tanti esercizi di applicazione dei contenuti spiegati, tante attività di ripetizione, rinforzo e

²¹ Cfr. MIUR 2025, p. 13

²² Il disegno è una forma di espressione, come l'elaborazione scritta di un pensiero o la stesura di un testo, e, come tutte le forme di espressione, ha il potere di infondere fiducia, sviluppare potenzialità e competenze.

consolidamento di quanto appreso per poter anche e soprattutto sbagliare, tanti problemi e quesiti su cui ragionare. L'allenamento deve essere previsto a scuola, dove l'alunno può essere guidato nell'esecuzione e corretto nell'errore, e non assegnato esclusivamente come compito a casa. La variabilità e la curiosità devono essere le coordinate da seguire e l'humus fertile in cui operare: gli alunni vanno preparati attraverso attività proposte in maniera sempre differente, per abituarli alla molteplicità del reale e per svilupparne il pensiero critico, flessibile e creativo, e devono essere impegnati in lavori attraenti, per catturarne l'attenzione, stimolarne l'interesse e, soprattutto, alimentare in essi il desiderio di sapere e di fare (motivazione intrinseca).

Collegamento con la realtà e approccio interdisciplinare

Nel presentare argomenti nuovi bisogna perseguire il collegamento al reale, attraverso esempi concreti, situazioni di vita quotidiana e problemi reali, per consentire agli alunni di percepire l'utilità e l'applicabilità di ciò che apprendono. In questo modo la classe è messa in grado di riflettere e di trasferire le conoscenze in ambiti diversi, rafforzando il senso e la motivazione dello studio. Nondimeno, è opportuno collegare ciò che è ignoto a ciò che è noto, in un'ottica decisamente interdisciplinare. Così facendo da un lato si facilita la comprensione e l'apprendimento e dall'altro si attivano le conoscenze pregresse degli alunni e l'avviamento a creare connessioni significative con un atteggiamento attivo e partecipativo nei confronti del sapere.²³ Allo sviluppo di un pensiero critico risulta proficuo anche abituare i discenti a motivare qualsiasi dichiarazione o scelta fatta; in tal modo si rafforzano la consapevolezza, la fiducia e l'autonomia e si incentiva l'autovalutazione. Altresì, giova proporre in tutte le discipline operazioni dirette e inverse per rafforzare il pensiero logico e flessibile (cogliendo i collegamenti e non solo applicando le regole), per fissare meglio i concetti (facendo e disfacendo), per comprendere che la logica diretta e inversa si applica ovunque e per verificare da sé la correttezza di quanto fatto (autovalutazione).

²³ Un esempio utile è il parallelismo tra le quattro operazioni matematiche e le tre analisi grammaticali (grammaticale, logica e del periodo): entrambe richiedono scomposizione, ordine e logica. Non a caso, il termine stesso "analisi", comune a entrambi gli ambiti, evidenzia come il pensiero analitico sia trasversale tra le discipline.

Preparazione alle prove strutturate e strategie cognitive

Può essere utile, per preparare gli alunni ad affrontare le prove e le verifiche standardizzate, allenarli in modo sistematico e non occasionale con simulazioni, oltretutto suggerire loro strategie efficaci per sostenerle. Può essere utile leggere tutto il testo della prova (a volte alcune risposte o soluzioni a quesiti iniziali si rintracciano o deducono per inferenza in quelli seguenti), leggere tutte le risposte prima di scegliere, rispondere prima alle domande che sembrano più facili per guadagnare tempo e fiducia, escludere le risposte che appaiono strane o sbagliate (procedere per esclusione),²⁴ cercare indizi nelle parole della domanda o nelle risposte fornite, rileggere le risposte per correggere in caso di errore.

Gestione delle emozioni e clima di classe

Le difficoltà di natura emotivo-comportamentali sono ridimensionate e contenute attraverso un approccio educativo che durante il percorso formativo valorizza l'errore e le sue potenzialità (didattica dell'errore). Sbagliare è naturale ed è parte integrante del processo di insegnamento-apprendimento, perché se da un lato i discenti dagli errori imparano e comprendono che non è un fallimento commetterne, ma un'opportunità per riflettere e migliorare, è anche vero che i docenti, proprio attraverso l'analisi degli errori, possono meglio calibrare l'azione didattica sui bisogni degli alunni e avviarli all'autocorrezione. Per normalizzare l'errore e togliere peso al giudizio l'insegnamento più efficace è vedere l'adulto (insegnante, educatore, genitore) che si mostra vulnerabile e ammette i propri dubbi e le personali difficoltà, ad esempio, raccontando aneddoti dei propri insuccessi o manifestando apertamente le proprie insicurezze, sbagliando di proposito per farsi correggere e suggerendo agli alunni le modalità di ricerca e verifica quando si hanno dubbi. Altra strategia efficace per

²⁴ Procedere per esclusione è una strategia che ritengo particolarmente utile, soprattutto nelle prove a risposta multipla, perché, lì dove c'è assenza di metodo o di conoscenze, subentra il ragionamento e il pensiero critico. Questa strategia, peraltro altamente inclusiva, può essere allenata attraverso attività guidate in classe, dove si ragiona collettivamente sul perché una risposta è corretta e le altre no. Gli alunni, abituati a questa pratica, imparano a usare l'esclusione come strumento di controllo e verifica del proprio ragionamento, e questo si traduce in un approccio più riflessivo e sicuro anche in situazione di prova; inoltre, li avvia ad un calcolo autonomo delle probabilità di riuscita in fase di revisione della prova.

prevenire e gestire le difficoltà di questo tipo è coltivare l'educazione emotiva, ossia educare gli alunni ad accogliere le emozioni (proprie e altrui) senza giudicarle, a esprimerle, a motivarle, a dare a loro un nome e a riflettere su se stessi. Essa è una chiave fondamentale per creare un contesto inclusivo, in cui ogni alunno è accolto, valorizzato e mai giudicato, e un clima emotivamente positivo, in cui si è tutti alla pari e ci si sente parte di una squadra. In un ambiente di apprendimento devono essere abbattute le barriere legate alla paura dell'errore e al confronto competitivo; ogni soggetto del gruppo-classe deve sentirsi libero di essere se stesso, ma nel rispetto dell'altro. La classe è una società in miniatura, in cui interagiscono e convivono diversi individui, ognuno con la propria personalità, le proprie fragilità e le proprie sicurezze, e in cui sono presenti le stesse dinamiche, soprattutto relazionali, che esistono anche al di fuori di essa. Per insegnare in modo efficace e apprendere con serenità è fondamentale creare un ambiente in cui nessuno prevarichi sull'altro, nessuno si senta inferiore o paragonato ad un altro, nessuno sia il modello di alunno da imitare o quello da sottostimare. Personalmente questo è il primo obiettivo a cui miro, quando inizio il lavoro con una classe nuova. Solo attraverso l'armonia e la concordia tra le parti si può preparare il terreno in cui dare a tutti la possibilità di fiorire.

Organizzazione del tempo e routine quotidiana

L'elaborazione cognitiva del tempo, importante per apprendere meglio, per facilitare la regolazione emotiva e il funzionamento esecutivo, è favorita dalla pratica a lavori a tempo prestabilito, da simulazioni di prove a tempo, ma soprattutto da una routine quotidiana ben definita, scandita da attività ricorrenti e transizioni ben strutturate, in modo tale che ogni parte della giornata o della lezione abbia un suo tempo, una sua importanza e soprattutto sia prevedibile. La routine giornaliera consente di creare un ritmo di lavoro e di riposo, insegna a rispettare e ottimizzare il tempo (cronologico e ontologico), riduce l'ansia da cambiamento e sviluppa l'autonomia.²⁵ Attività di routine

²⁵ Piaget, Bruner e Montessori hanno sottolineato il valore della routine quotidiana strutturata come supporto allo sviluppo cognitivo, poiché favorisce la costruzione di schemi mentali stabili e l'autonomia del bambino. Le neuroscienze educative, in particolare attraverso gli studi di Daniel J. Siegel, evidenziano come la prevedibilità della routine contribuisca a integrare le funzioni emotive e cognitive del cervello, creando le condizioni ideali per l'apprendimento (cfr. Siegel, D. J., 2012, p. 45).

che da sempre propongo e a cui gli alunni non solo si abituano, ma vi si dedicano piacevolmente, sono quelle di apertura della lezione, che chiamo “warm up o riscaldamento”, e che impegnano gli alunni in un lavoro di riflessione e produzione libera e creativa: data, cornicetta e pensiero del giorno. Scrivere la data completa con indicazione del giorno precedente e seguente li aiuta a orientarsi nel tempo e nel caso dei più piccoli a memorizzare in maniera progressiva e spontanea i giorni della settimana e i mesi dell’anno (anche inglese quando il riscaldamento avviene durante la lezione di inglese); ideare e realizzare la cornicetta, ovvero un disegno geometrico, ha una funzione apparentemente ornamentale, ma nasconde numerosi benefici (coordinazione oculo-manuale, orientamento nello spazio, creatività e inventiva, senso del ritmo e rispetto della sequenza, pratica del numero e delle figure geometriche, sviluppo dell’attenzione, della precisione e della concentrazione, acquisizione del senso estetico e apprezzamento di equilibrio e armonia); esprimere il proprio e personale pensiero del giorno aiuta gli alunni a iniziare la giornata o la lezione con l’espressione per iscritto di riflessioni, accompagnate da un disegno, pratica che favorisce la produzione scritta e previene la paura del foglio bianco, che sopraggiunge quando il discente non è abituato a scrivere.²⁶ Come pratica pressoché giornaliera c’è anche “una parola al giorno”, ossia la scoperta di una parola nuova, di cui si scoprono il significato, i sinonimi, i contrari e il corrispettivo in inglese attraverso la lettura del lemma sul sito della Treccani e con essa e con un suo contrario gli alunni formulano frasi per iscritto e libere, poi lette e condivise.²⁷ Nel caso in cui sia presente un alunno di altra lingua madre, la stessa parola è indicata e scritta anche nell’idioma e nella scrittura del compagno di classe; questa attività favorisce l’inclusione e il senso di appartenenza, promuove l’empatia e sviluppa la curiosità verso ciò che è diverso o sconosciuto. Al termine della giornata scolastica, invece, di solito propongo attività

²⁶ Il Rapporto INVALSI 2019 ha evidenziato che le difficoltà nella lettura e nella comprensione del testo non solo persistono nel tempo, ma tendono addirittura ad acuirsi man mano che gli studenti avanzano nei cicli scolastici. Si noti che l’analisi è relativa alle prove effettuate prima della pandemia. Cfr. INVALSI, 2019.

²⁷ Questa attività favorisce l’ampliamento del lessico, sviluppa la curiosità e il senso di scoperta, abitua alla ricerca e verifica, educa all’utilizzo sano della rete, rende noti siti utili per la formazione culturale, evidenzia la corretta pronuncia e chiarisce concetti di ortografia e morfologia, avvia alla scoperta dell’etimologia, ma soprattutto promuove la lettura e decodifica delle abbreviazioni e dei simboli convenzionali utilizzati nel vocabolario, alcuni dei quali sono utilizzati anche in campo matematico (parentesi quadre e tonde, doppia tilde, doppia freccia).

interattive tramite LIM (Lavagna Interattiva Multimediale) e giochi digitali con l'obiettivo di consolidare, in modo divertente e coinvolgente, i contenuti appresi. Queste attività non solo stimolano la partecipazione attiva e il pensiero critico, ma educano anche a un uso consapevole e proficuo delle tecnologie. Gli alunni vengono guidati alla scoperta di siti didattici e risorse online utili, e vengono proposti giochi alternativi, educativi e formativi come valida alternativa ai tradizionali videogiochi, promuovendo così un approccio equilibrato e intelligente al mondo digitale.

L'interdisciplinarietà è la risposta

Le problematiche emerse durante i Giochi Matematici nella scuola Primaria mettono in luce i punti deboli di una didattica che non punta allo sviluppo delle competenze trasversali (lettura, pianificazione, autoregolazione) o che, pur indirizzata a questo fine, non risulta pienamente efficace; esse evidenziano la necessità di un approccio didattico che consideri non solo le competenze matematiche, ma anche quelle emotive, cognitive e metacognitive e, pur essendo maggiormente manifeste in matematica, interessano anche gli altri ambiti disciplinari. Inoltre, le riflessioni e le proposte qui condivise suggeriscono la necessità di pensare alla valutazione in modo differente, di riconsiderare come e cosa valutiamo, di superare la logica dei risultati per valorizzare il processo, la strategia, l'impegno e la crescita, ovvero le competenze; valutare le competenze, però, significa anche progettare per competenze, il che non si riduce all'elaborazione di Unità di Apprendimento, ma vuol dire praticare una didattica, ispirata alla flessibilità, alimentata dalla creatività, costruita a partire dalle potenzialità degli alunni e che contempi e implichi l'interdisciplinarietà.

Le proposte illustrate non si pongono come soluzioni definitive, ma come spunti per una pratica didattica più consapevole, inclusiva e orientata allo sviluppo delle competenze.

Bibliografia

Baldascino, R. (2011). *LIM. Ambienti Integrati di Apprendimento. Costruire contesti per sviluppare competenze*. Napoli: Tecnodid

Capone, R., Lemmo, A., & Filiberti, F. (2021). *I problemi verbali e il valore predittivo delle prove INVALSI*. In G. Anichini, P. Dalle Pezze, M. Ferrari & L. Lucangeli (a cura di), *I dati INVALSI come strumento per migliorare la didattica della matematica nella scuola primaria* (pp. 100-121). Franco Angeli
<https://tinyurl.com/Problemi-verbali-prove-INVALSI>

Castoldi, M. (2011). *Progettare per competenze. Percorsi e strumenti*. Roma: Carocci

Castoldi, M. (2021). *Valutare gli apprendimenti nella scuola primaria*. Roma: Carocci

Castoldi, M. (2024). *Promuovere la comprensione in classe. Repertorio ragionato di strategie didattiche*. Roma: Carocci

Morlini, M., & Gatti, M. (2010). *Difficoltà di lettura e comprensione: Analisi dei risultati delle prove INVALSI*. INVALSI.

Pellerey, M. (2004). *Le competenze individuali e il portfolio*. Roma: La Nuova Italia

Rapporto INVALSI. (2019). *Speciale Rapporto INVALSI 2019*

Una panoramica sui risultati del campione. INVALSI

<https://tinyurl.com/rapporto-INVALSI-2019>

Raimo, C. (2017). *Tutti i banchi sono uguali. La scuola e l'uguaglianza che non c'è*. Torino: Einaudi

Ranieri, M. (2022). *Competenze digitali per insegnare*. Roma: Carocci

Recalcati, M. (2014). *L'ora di lezione. Per un'erotica dell'insegnamento*. Torino: Einaudi

Siegel, D. J. (2012). *La mente relazionale*. Milano: Raffaello Cortina Editore

Normativa scolastica e contributi

Commissione Europea (2006). *RACCOMANDAZIONE DEL PARLAMENTO EUROPEO E DEL CONSIGLIO del 18 dicembre 2006 relativa a competenze chiave per l'apprendimento permanente*. Gazzetta ufficiale dell'Unione europea (30/12/2006)

Commissione Europea (2008). *RACCOMANDAZIONE DEL PARLAMENTO EUROPEO E DEL CONSIGLIO del 23 aprile 2008 sulla costituzione del Quadro europeo delle qualifiche per l'apprendimento permanente*. Gazzetta ufficiale dell'Unione europea (06/05/2008)

Council Recommendation (2017). *Council Recommendation of 22 May 2017 on the European Qualifications Framework for lifelong learning and repealing the recommendation of the European Parliament and of the Council of 23 April 2008 on the establishment of the European Qualifications Framework for lifelong learning*. Official Journal of the European Union (15/06/2017)

Commissione Europea (2018). *RACCOMANDAZIONE DEL CONSIGLIO del 22 maggio 2018 relativa alle competenze chiave per l'apprendimento permanente*. Gazzetta ufficiale dell'Unione europea (04/06/2018)

OECD (2019). *OECD Future of Education and Skills 2030 OECD Learning Compass 2030 A series of concept notes*

MIUR (2025). *Nuove Indicazioni 2025 Scuola dell'infanzia e Primo ciclo di istruzione Materiali per il dibattito pubblico*
<https://tinyurl.com/Nuove-Indicazioni-2025>

Indice

Lettera del Direttore

Benvenuti su "Quaderni Caccioppoli"

Pag.3

di Rosa Maria Testa

Associazione Napoletana di Filosofia e Scienze Umane "Renato Caccioppoli" (A.N.F.S.U.)

Editoriale

Pag.5

di Ferdinando Casolaro

SEZIONE 1: la parola agli studenti

Nascita di un numero magico

Pag.9

di Agostino Baiano - Antonio Castiello

La spirale di Teodoro

Pag.12

di Fabio Cuomo - Claudia Ercole - Ciro Strazzullo

I numeri e la realtà: riflessioni storico-filosofiche

Pag.14

di Francesco Bava - Fabio Vuolo

Il taglio di Dedekind

Pag.20

di Ciro Di Leva

Praga e Kafka: un viaggio nell'anima della città magica

Pag.23

di Raffaele Musella

Una mattinata nella storia della nostra città:

Pag.26

il "Ferraris" in visita a Il Mattino

di Raffaele Iannone - Domenico Iavarone - Gennaro Ratti

Informatica al servizio della matematica
di **Ciro Strazzullo - Martina Ercole - Fabio Cuomo - Alfredo Cesarano** *Pag. 28*

L'economia da una nuova prospettiva: l'Econofisica
di **Vittorio Marra** *Pag.31*

Ma il teorema di Pitagora è davvero di Pitagora
di **Micaela Piscopo** *Pag. 36*

**L'Analisi Matematica dietro il volante:
quando la Matematica fa correre il mondo**
di **Simone Perrone e Luca Raiano** *Pag. 44*

**Empatia Artificiale: Interazione Uomo-Robot tra Cognizione,
Emozione e Tecnologia**
di **Lorenzo D'Errico** *Pag. 50*

Il triangolo: mattone fondamentale della geometria
di **Classi 5^a del 30° Circolo didattico "G. Parini" Napoli** *Pag. 61*

Il Pi Greco: un numero magico e un po' goloso
di **Tiziano Barbarotto** *Pag.66*

Il cubo di Rubik
di **Diego Negri, Enrico Severi e Noah Spiazzi** *Pag.74*

SEZIONE 2: Spunti per una didattica interdisciplinare

**Esperienza di insegnamento
in un Centro Provinciale per l'Istruzione degli Adulti (CPIA)**
di **Lucia Guadagnino** *Pag.78*

Il genio della matematica
di **Filomena Carrella** *Pag. 82*

Giochi Matematici per la Scuola – Premio "Aldo Morelli"
Quattro anni di osservazione alla scuola primaria
Analisi e riflessioni sulle difficoltà emerse
di **Giusy Annamaria Cappuccio** *Pag 89*

Giochi Matematici per la Scuola – Premio “Aldo Morelli”

Pag. 98

Quattro anni di osservazione alla scuola primaria

Proposte operative

di Giusy Annamaria Cappuccio

